Algoritmo Paramétrico

para divisão de polinómios na forma $(x + \pi)$ e obter resto zero

Um polinómio ou função polinomial é uma expressão sob a forma

$$P(x) = \lambda_n\, x^n \;+\; \lambda_{n-1}\, x^{n-1} \;+\; \lambda_{n-2}\, x^{n-2} \;+\; \lambda_{n-3}\, x^{n-3} \;+\; ... \;+\; \lambda_3\, x^3 \;+\; \lambda_2\, x^2 \;+\; \lambda_1\, x \;+\; \lambda_0$$

Qualquer polinómio é suscetível ao processo de divisão,

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{quociente} + \text{resto}$$

Querendo encontrar um binómio divisor do tipo $(x+\pi)$, $\pi \in \mathbb{Q}$, que devolva um quociente com um polinómio de grau inferior e resto zero, ou seja,

$$P'(x) = \lambda'_{n-1}\, x^{n-1} \;+\; \lambda'_{n-2}\, x^{n-2} \;+\; \lambda'_{n-3}\, x^{n-3} \;+\; \lambda'_{n-4}\, x^{n-4} \;+\; ... \;+\; \lambda'_3\, x^3 \;+\; \lambda'_2\, x^2 \;+\; \lambda'_1\, x \;+\; \lambda'_0$$

deve-se satisfazer o valor de π de modo a que se obtenha a igualdade

$$P(x) = (x + \pi)\, P'(x) \tag{1}$$

Trabalhando com o segundo membro, desenvolve-se a expressão,

$$(x + \pi)\, P'(x) = xP'(x) + \pi P'(x) =$$

$$= (x\lambda'_{n-1}\, x^{n-1} + x\lambda'_{n-2}\, x^{n-2} + x\lambda'_{n-3}\, x^{n-3} + x\lambda'_{n-4}\, x^{n-4} + ... + x\lambda'_3\, x^3 + x\lambda'_2\, x^2 + x\lambda'_1\, x + x\lambda'_0) +$$

$$+ (\pi\lambda'_{n-1}\, x^{n-1} + \pi\lambda'_{n-2}\, x^{n-2} + \pi\lambda'_{n-3}\, x^{n-3} + \pi\lambda'_{n-4}\, x^{n-4} + ... + \pi\lambda'_3\, x^3 + \pi\lambda'_2\, x^2 + \pi\lambda'_1\, x + \pi\lambda'_0) =$$

Como uma das parcelas é x a multiplicar pelo polinómio $P'(x)$, este sobre de grau,

$$= (\lambda'_{n-1}\, x^n \;+\; \lambda'_{n-2}\, x^{n-1} \;+\; \lambda'_{n-3}\, x^{n-2} \;+\; \lambda'_{n-4}\, x^{n-3} \;+\; ... \;+\; \lambda'_3\, x^4 \;+\; \lambda'_2\, x^3 \;+\; \lambda'_1\, x^2 \;+\; \lambda'_0 x) +$$

$$+ (\pi\lambda'_{n-1}\, x^{n-1} + \pi\lambda'_{n-2}\, x^{n-2} + \pi\lambda'_{n-3}\, x^{n-3} + \pi\lambda'_{n-4}\, x^{n-4} + ... + \pi\lambda'_3\, x^3 + \pi\lambda'_2\, x^2 + \pi\lambda'_1\, x + \pi\lambda'_0) =$$

Agrupando as incógnitas do mesmo grau,

$$= \lambda'_{n-1}\, x^n + (\lambda'_{n-2}\, x^{n-1} + \pi\lambda'_{n-1}\, x^{n-1}) + (\lambda'_{n-3}\, x^{n-2} + \pi\lambda'_{n-2}\, x^{n-2}) + (\lambda'_{n-4}\, x^{n-3} + \pi\lambda'_{n-3}\, x^{n-3}) +$$

$$... \;+\; (\lambda'_2\, x^3 \;+\; \pi\lambda'_3\, x^3) \;+\; (\lambda'_1\, x^2 \;+\; \pi\lambda'_2\, x^2) \;+\; (\lambda'_0\, x \;+\; \pi\lambda'_1\, x) \;+\; \pi\lambda'_0 =$$

Colocando as incógnitas em evidência,

$$= \lambda'_{n-1}\, x^n \;+\; (\lambda'_{n-2} \;+\; \pi\lambda'_{n-1})\, x^{n-1} \;+\; (\lambda'_{n-3} \;+\; \pi\lambda'_{n-2})\, x^{n-2} \;+\; (\lambda'_{n-4} \;+\; \pi\lambda'_{n-3})\, x^{n-3} \;+\; ...$$

$$... \;+\; (\lambda'_2 \;+\; \pi\lambda'_3)\, x^3 \;+\; (\lambda'_1 \;+\; \pi\lambda'_2)\, x^2 \;+\; (\lambda'_0 \;+\; \pi\lambda'_1)\, x \;+\; \pi\lambda'_0$$

Daqui, igualam-se os termos de igual ordem do primeiro e segundo membro da equação,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n\, x^n = \lambda'_{n-1}\, x^n \\ \lambda_{n-1}\, x^{n-1} = (\lambda'_{n-2} + \pi\lambda'_{n-1})\, x^{n-1} \\ \lambda_{n-2}\, x^{n-2} = (\lambda'_{n-3} + \pi\lambda'_{n-2})\, x^{n-2} \\ \lambda_{n-3}\, x^{n-3} = (\lambda'_{n-4} + \pi\lambda'_{n-3})\, x^{n-3} \\ \lambda_{n-4}\, x^{n-4} = (\lambda'_{n-5} + \pi\lambda'_{n-4})\, x^{n-4} \\ \qquad\vdots \\ \lambda_4\, x^4 = (\lambda'_3 + \pi\lambda'_4)\, x^4 \\ \lambda_3\, x^3 = (\lambda'_2 + \pi\lambda'_3)\, x^3 \\ \lambda_2\, x^2 = (\lambda'_1 + \pi\lambda'_2)\, x^2 \\ \lambda_1\, x = (\lambda'_0 + \pi\lambda'_1)\, x \\ \lambda_0 = \pi\lambda'_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n = \lambda'_{n-1} \\ \lambda_{n-1} = \lambda'_{n-2} + \pi\lambda'_{n-1} \\ \lambda_{n-2} = \lambda'_{n-3} + \pi\lambda'_{n-2} \\ \lambda_{n-3} = \lambda'_{n-4} + \pi\lambda'_{n-3} \\ \lambda_{n-4} = \lambda'_{n-5} + \pi\lambda'_{n-4} \\ \qquad\vdots \\ \lambda_4 = \lambda'_3 + \pi\lambda'_4 \\ \lambda_3 = \lambda'_2 + \pi\lambda'_3 \\ \lambda_2 = \lambda'_1 + \pi\lambda'_2 \\ \lambda_1 = \lambda'_0 + \pi\lambda'_1 \\ \lambda_0 = \pi\lambda'_0 \end{cases} \quad \text{(I)} \quad \Leftrightarrow$$

Igualando os coeficientes λ' por ordem crescente,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'_0 = \dfrac{\lambda_0}{\pi} \\ \lambda'_1 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda'_0}{\pi} \\ \lambda'_2 = \dfrac{\lambda_2 - \lambda'_1}{\pi} \\ \lambda'_3 = \dfrac{\lambda_3 - \lambda'_2}{\pi} \\ \lambda'_4 = \dfrac{\lambda_4 - \lambda'_3}{\pi} \\ \qquad\vdots \\ \lambda'_{n-4} = \dfrac{\lambda_{n-4} - \lambda'_{n-5}}{\pi} \\ \lambda'_{n-3} = \dfrac{\lambda_{n-3} - \lambda'_{n-4}}{\pi} \\ \lambda'_{n-2} = \dfrac{\lambda_{n-2} - \lambda'_{n-3}}{\pi} \\ \lambda'_{n-1} = \dfrac{\lambda_{n-1} - \lambda'_{n-2}}{\pi} = \lambda_n \\ \lambda'_n = \dfrac{\lambda_n - \lambda'_{n-1}}{\pi} \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Estas equações paramétricas mostram os coeficientes do polinómio quociente $P'(x)$ que satisfazem a condição inicial,

$$P(x) = (x + \pi)\, P'(x)$$

quando o polinómio dividendo $P(x)$ é dividido por um binómio divisor na forma $(x + \pi)$ com resto zero.

Como π tende a ser um número inteiro (mas não necessariamente), o algoritmo paramétrico em oposição à regra de Ruffini permite logo selecionar quais os números inteiros, $\pi \in \mathbb{Z}$, que podem ser solução das equações paramétricas geradoras de $P'(x)$, pois logo a primeira equação, $\lambda'_0 = \dfrac{\lambda_0}{\pi}$, implica forçosamente um número inteiro, ou seja, um mínimo múltiplo comum com λ_0.

Este algoritmo permite verificar qual o valor de π sem ter de completar todos os cálculos sobre os coeficientes, ao contrário da regra de Ruffini, bastando parar quando não se obtém um número inteiro. Pode-se também verificar que o coeficiente de maior grau do polinómio $P'(x)$, λ'_{n-1}, é igual ao coeficiente de maior grau do polinómio $P(x)$, λ_n, tal como esperado (verifica-se noutros métodos de divisão). Podemos ver também que como $P'(x)$ é um grau inferior a $P(x)$, o termo λ'_n é igual a zero, pelo que a última equação paramétrica serve de controlo, já que o seu resultado tem de ser forçosamente nulo, $\lambda_n - \lambda'_{n-1} = 0$.

Exemplos

Verifiquemos a seguinte equação polinomial:

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x - 1 \tag{A}$$

O coeficiente λ_0 é -1, então o valor de π poderá ser $\{-1, 1\}$. Verifiquemos,

$$\begin{cases} \pi \to -1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{-1}{-1} = 1 \\ \lambda'_1 = \dfrac{3-1}{-1} = -2 \\ \lambda'_2 = \dfrac{7+2}{-1} = -9 \\ \lambda'_3 = \dfrac{5+9}{-1} = -14 \\ \lambda'_4 = \dfrac{2+14}{-1} = -16 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi \to 1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ \lambda'_1 = \dfrac{3-1}{1} = 4 \\ \lambda'_2 = \dfrac{7-4}{1} = 3 \\ \lambda'_3 = \dfrac{5-3}{1} = 2 \\ \lambda'_4 = \dfrac{2-2}{1} = 0 \end{cases}$$

Uma vez que $\lambda'_3 = \lambda_4$ ou $\lambda'_4 = 0$, então o binómio divisor terá $\pi = 1$ e pode-ser verificar a seguinte igualdade em relação ao polinómio dividendo

$$P(x) = (x+1)(2x^3 + 3x^2 + 4x - 1)$$

Seguindo com outro exemplo, podemos constatar que este algoritmo para procurar quocientes de resto zero (ou seja, raízes do polinómio dividendo) é mais pragmático e eficiente que a regra de Ruffini. Considerando a seguinte função,

$$P(x) = 2x^4 - 15x^3 - 23x^2 - 38x + 18 \tag{B}$$

conhecendo as propriedades paramétricas do algoritmo, sendo $\lambda_0 = 18$, então o binómio $(x+\pi)$ terá um $\pi \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\}$. Verificando as soluções possíveis, encontramos

$$\begin{cases} \pi \to -9 \\ \lambda'_0 = \dfrac{18}{-9} = -2 \\ \lambda'_1 = \dfrac{-38+2}{-9} = 4 \\ \lambda'_2 = \dfrac{-23-4}{-9} = 3 \\ \lambda'_3 = \dfrac{-15-3}{-9} = 2 \\ \lambda'_4 = \dfrac{2-2}{-9} = 0 \end{cases}$$

Que devolve $P(x) = (x-9)(2x^3 + 3x^2 + 4x - 2)$.

Embora trabalhoso, pois analiticamente há um conjunto de soluções possíveis que têm de ser verificadas, é possível logo à partida delimitar o intervalo de procura e excluir alguns pares que de outro modo teriam de ser verificados, neste caso $\{\pm4, \pm5, \pm7, \pm8\}$, que constituiriam 50% do esforço em análise.

Quanto maior o grau do polinómio, n, e maior o termo independente, λ_0, maior tenderá a ser o esforço analítico, como em qualquer outro algoritmo de divisão polinomial.

Note-se que essa não é uma regra. O polinómio $x^8 - 4x^7 + x^6 + 5x^5 + 6x^4 - 10x^3 + 3x^2 + 12x - 20$ tem um $\pi = -2$. O polinómio $4x^8 - 24x^7 + 37x^6 - 24x^5 + 7x^4 + 34x^3 + 8x^2 - 56x + 96$ tem um $\pi = -4$. Há uma dilatação do conjunto de soluções possíveis, mas não necessariamente do volume de cálculo.

Monómio do Resto

Uma propriedade que o algoritmo paramétrico devolve em oposição a outras ferramentas de divisão polinomial é o monómio do resto: enquanto os restantes algoritmos devolvem o monómio de menor grau, um coeficiente sem variável (ou x^0), este devolve o monómio de maior grau, o coeficiente de x^n.

Repare-se que a procura por um monómio divisor que dê resto zero começa com a procura de um mínimo múltiplo comum do termo de menor grau do polinómio dividendo, λ_0, mas o par $\{\pm 1\}$ será sempre uma solução possível, já que devolverá sempre números inteiros, pelo que o coeficiente de maior grau do polinómio quociente, λ'_n, que é zero quando o resto é zero, não será nulo. Por exemplo, no polinómio anterior (B), cujo $\pi = -9$, ao proceder ao algoritmo para $\pi = \{\pm 1\}$, irão obter-se coeficientes inteiros que não fornecerão um λ'_n nulo, já que o par $\{\pm 1\}$ não é solução para resto zero. Assim, a igualdade que deu início ao algoritmo paramétrico (1), que subentende resto zero, deve ser reescrita como

$$P(x) = (x + \pi)\, P'(x) + R \tag{2}$$

com um R relacionado ao coeficiente de maior grau do polinómio quociente, λ'_n. Quando é nulo, a equação (2) ganha a forma em (1). Deve-se então perceber que valor toma R quando é não nulo. Olhando para as equações paramétricas em (I), a primeira equação tem subentendida uma parcela nula e que não foi escrita, mas seguindo a sequência numérica das outras equações pode-se completar o padrão escrevendo $\lambda_n = \lambda'_{n-1} + \pi\lambda'_n$, com $\pi\lambda'_n = 0$ quando procuramos quocientes de resto zero (que é o interesse deste algoritmo para divisão de polinómios). Então, a última parcela da equação paramétrica é o valor do resto, pelo que (2) se pode reescrever

$$P(x) = (x + \pi)\, P'(x) + \pi\lambda'_n \tag{3}$$

Realizando o algoritmo para o polinómio (B) no conjunto $\{\pm 1\}$ temos,

$$\begin{cases} \pi \to -1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{18}{-1} = -18 \\ \lambda'_1 = \dfrac{-38 + 18}{-1} = 20 \\ \lambda'_2 = \dfrac{-23 - 20}{-1} = 43 \\ \lambda'_3 = \dfrac{-15 - 43}{-1} = 58 \\ \lambda'_4 = \dfrac{2 - 58}{-1} = 56 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi \to 1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{18}{1} = 18 \\ \lambda'_1 = \dfrac{-38 - 18}{1} = -56 \\ \lambda'_2 = \dfrac{-23 + 56}{1} = 33 \\ \lambda'_3 = \dfrac{-15 - 33}{1} = -48 \\ \lambda'_4 = \dfrac{2 + 48}{1} = 50 \end{cases}$$

Escrevendo as soluções, fica

$$\pi \to -1 \Longrightarrow P(x) = (x - 1)(58x^3 + 43x^2 + 20x - 18) - 56x^4$$
$$\pi \to 1 \Longrightarrow P(x) = (x + 1)(-48x^3 + 33x^2 - 56x + 18) + 50x^4$$

Polinómios Incompletos

Como seria de esperar, o algoritmo paramétrico mantém-se válido quando os polinómios têm coeficientes nulos e por conseguinte termos omissos. Segue-se exemplo,

$$P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 1 \tag{C}$$

Como $\lambda_0 = -1$, então $\pi = \{\pm 1\}$:

$$\begin{cases} \pi \to -1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{-1}{-1} = 1 \\ \lambda'_1 = \dfrac{1-1}{-1} = 0 \\ \lambda'_2 = \dfrac{-3-0}{-1} = 3 \\ \lambda'_3 = \dfrac{0-3}{-1} = 3 \\ \lambda'_4 = \dfrac{5-3}{-1} = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi \to 1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ \lambda'_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2 \\ \lambda'_2 = \dfrac{-3-2}{1} = -5 \\ \lambda'_3 = \dfrac{0+5}{1} = 5 \\ \lambda'_4 = \dfrac{5-5}{1} = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$\pi \to -1 \Longrightarrow P(x) = (x-1)(3x^3 + 3x^2 + x - 1) + 2x^4$$
$$\pi \to 1 \Longrightarrow P(x) = (x+1)(5x^3 - 5x^2 + 2x - 1)$$

Neste caso houve um aumento do monómios, que pode ou não ser útil, mas nem sempre é assim e obtém-se uma simplificação, que é sempre desejada:

$$P(x) = x^4 + x^3 + x + 1 \tag{D}$$

Sendo $\lambda_0 = 1$, logo $\pi = \{\pm 1\}$:

$$\begin{cases} \pi \to -1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ \lambda'_1 = \dfrac{1+1}{-1} = -2 \\ \lambda'_2 = \dfrac{0+2}{-1} = -2 \\ \lambda'_3 = \dfrac{1+2}{-1} = -3 \\ \lambda'_4 = \dfrac{1+3}{-1} = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi \to 1 \\ \lambda'_0 = \dfrac{1}{1} = 1 \\ \lambda'_1 = \dfrac{1-1}{1} = 0 \\ \lambda'_2 = \dfrac{0-0}{1} = 0 \\ \lambda'_3 = \dfrac{1-0}{1} = 1 \\ \lambda'_4 = \dfrac{1-1}{1} = 0 \end{cases}$$

Então

$$\pi \to -1 \Longrightarrow P(x) = (x-1)(-3x^3 - 2x^2 - 2x - x) + 4x^4$$
$$\pi \to 1 \Longrightarrow P(x) = (x+1)(x^3 + 1)$$

π fracionário

O mesmo se dá com números fracionários, embora o trabalho da descoberta seja maior, como em qualquer método analítico não automatizado. Sendo

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 4x - 2 \tag{E}$$

Como $\lambda_0 = -2$, então $\pi = \{\pm 1, \pm 2\}$, mas este conjunto não devolve um resto igual a zero, mas antes um $\pi\lambda'_n$, pelo que não há solução com $\pi \in \mathbb{Z}$. Procurando solução no conjunto dos números facionários, $\mathbb{Q}$, encontramos um $\pi = \frac{1}{2}$ que devolve resto zero.

$$\begin{cases} \pi \to \dfrac{1}{2} \\ \lambda'_0 = 2\,(-2) = -4 \\ \lambda'_1 = 2\,(-4+4) = 0 \\ \lambda'_2 = 2\,(0-0) = 0 \\ \lambda'_3 = 2\,(1-0) = 2 \\ \lambda'_4 = 2\,(2-2) = 0 \end{cases}$$

Verifica-se então

$$\pi \to \frac{1}{2} \Longrightarrow P(x) = (x + \frac{1}{2})(2x^3 - 4)$$

O algoritmo embora válido para $\forall\,\pi \in \mathbb{Q}$, a procura analítica pode ser exaustiva e não devolver uma solução mesmo quando ela exista, então deve-se recorrer a outros métodos de divisão polinomial ou a ferramentas gráficas, como o teorema do resto.