MINISTERIO DE EDUCACIÓN

PROGRAMA DE CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Este programa fue elaborado por:

Dr. C. Eduardo Miguel Pérez Almarales

Dr. C. Guillermo Calixto González Labrada.

Dr. C. Marta Álvarez Pérez

M. Sc. Edel Ernesto Pérez Almarales

M. Sc. Justo Javier Castillo Reyna

Índice

INTRODUCCIÓN

El folleto que se ofrece tiene el propósito de proporcionarles a los profesores-preparadores de concursantes en Matemática de la Educación Preuniversitaria orientaciones e indicaciones metodológicas que les facilitarán el proceso de preparación de sus estudiantes.

Las actividades propuestas, constituyen el resultado de la investigación realizada por el autor sobre eltema: "Estrategia didáctica para la preparación de concursantes en Matemática de la Educación Preuniversitaria sobre base a la gestión de conocimientos".

Esperamos que realmente le ayude a lograr mejores resultados en este sentido.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

PROGRAMA PARA LA PREPARACIÓN DE LOS CONCURSANTES EN MATEMÁTICA DE LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

TOTAL DE HORAS: 240 (120 presenciales y 120 para el estudio independiente)

FUNDAMENTACIÓN DEL PROGRAMA

Las necesidades educativas especiales (NEE) pueden considerarse como demandas y requerimientos individuales o grupales de aprendizaje y de opciones educativas diferenciadas que generalmente no quedan cubiertas por los programas regulares, y que se sustentan en la diversidad o variabilidad de los estudiantes que asisten a un centro educacional (Castellanos, D.,1997).

Un estudiante con necesidades educativas especiales es aquel que no logra, con lo que está establecido en los programas escolares regulares, desarrollar al máximo sus potencialidades. Es por ello que necesitan una atención diferenciada dentro del sistema educativo, que le permita avanzar a partir de sus características individuales, hacia el logro de los objetivos de una educación desarrolladora.

Como se plantea en el Proyecto Regional de Educación para América Latina y el Caribe (2003), es importante eliminar o compensar la desigualdad, pero no la diferencia. La igualdad de oportunidades no significa tratar a todos por igual, sino proporcionar a cada uno lo que necesita para potenciar al máximo sus posibilidades y su identidad.

El Ministerio de Educación de Cuba ha mostrado interés por la identificación y preparación de este tipo de estudiante con el objetivo de formar desde edades tempranas el potencial científico del país. Para ello se ha normado, por medio de la resolución 91/2007, el espacio y tiempo que se puede utilizar para el trabajo con los estudiantes concursantes en Matemática, utilizando como vía fundamentalmente la clase y el trabajo extraclase, por medio de los círculos de interés y las sociedades científicas, con lo cual se potencia su trabajo independiente y estudio individual.

Dentro de la preparación de concursantes de Matemática en la Educación Preuniversitaria es primordial en los momentos actuales de crear espacios para sistematizar, integrar y gestionar sus conocimientos a partir de las interacciones que se deben desarrollar en el entorno de los grupos de preparación para que los “descubrimientos” de cada miembro del grupo puedan ser utilizados por todos, aspecto que posibilita que se aplique de una forma más acabada en nuevos contextos.

El presente programa pretende establecer cuáles son los objetivos, contenidos, métodos, formas de organización y evaluación, así como la bibliografía que se debe tener en cuenta para el desarrollo del talento matemático de los estudiantes en esta etapa de sus vidas, de modo que puedan desarrollar su pensamiento creador, dando respuesta a sus perspectivas al ingresar a esta enseñanza, al mismo tiempo que forjen estas expectativas a medida que transcurra el proceso de enseñanza – aprendizaje, de modo que puedan prepararse también para los concursos nacionales y las olimpiadas internacionales..

El proceso de preparación de concursantes en Matemática hasta nivel nacional en Cuba tiene un carácter masivo y en consecuencia todos los estudiantes tienen posibilidades de participar en los eventos de concurso a nivel de base y de prepararse en la asignatura por diferentes vías. Comienza con la preparación de los estudiantes en el aula, además de la preparación en horarios extra en los diferentes subsistemas de educación bajo la orientación de los Centros Provinciales de Entrenamiento, con el objetivo de atender a las necesidades educativas especiales que tiene este tipo de estudiantes.

Los centros de entrenamiento para el trabajo con talentos, cuyo funcionamiento fue orientado por el Ministerio de Educación hace ya varios años, radican en los IPVCE (Institutos Preuniversitarios Vocacionales de Ciencias Exactas). Sin embargo, la atención de talentos en la base no puede ser un problema de un número determinado de profesores, eso limita la probabilidad de que el estudiante con capacidad coincida con el profesor capaz de potenciar su desarrollo y propicia que se pierda el talento.

El fin de este programa es servir de base a la dirección del trabajo educativo con los concursantes en Matemática de la Educación Preuniversitaria mediante las clases y las formas de trabajo extra-docente de esta asignatura, así como a través de la orientación y control del trabajo independiente y colaborativo de los estudiantes, sobre la base de la gestión de conocimientos, con la bibliografía especificada. Esto requiere a su vez de una elevada preparación de los profesores-preparadores, que se debe garantizar desde el pregrado en las Universidades de Ciencias Pedagógicas, cuestión que todavía no se ha logrado, y después de graduados, por medio de las preparaciones metodológicas y de las diferentes formas de la educación postgraduada.

OBJETIVOS GENERALES:

- Desarrollar formas lógicas de pensamiento, cualidades de la conducta y la personalidad, convicciones y actitudes acordes con la moral socialista, mediante la actividad que realiza en la resolución de problemas.
- Explicar el proceso de solución seguido sobre la base de sus ideas matemáticas y sus correspondientes representaciones y fundamentar la vía de solución elegida.

- Identificar las relaciones existentes en un dominio dado de la realidad, lo que se refleja cuando los traducen en conceptos, propiedades y relaciones matemáticas.
- Definir y negar las definiciones de conceptos; identificar, ejemplificar, comparar, clasificar, limitar y generalizar conceptos; reformular definiciones o reflexionar y evaluar definiciones; derivar consecuencias de una o varias definiciones.
- Expresar argumentos con rigor, claridad y coherencia haciendo un adecuado uso de la terminología y simbología matemática.
- Buscar informaciones a partir de diversas fuentes, incluyendo las electrónicas; elegir y aplicar los recursos más indicados para racionalizar su trabajo mental; utilizar los recursos electrónicos para documentar y presentar los resultados; reflexionar sobre las posibilidades y límites de utilización de recursos que se utilizan para racionalizar el trabajo mental; utilizar el lenguaje simbólico de la matemática (variables, términos, ecuaciones, funciones, diagramas)a los fines de racionalizar su trabajo.
- Elaborar ideas matemáticas y estrategias de solución para resolver problemas, estableciendo relaciones entre los conocimientos y habilidades de distintas áreas matemáticas y asignaturas y utilizando conscientemente procedimientos heurísticos.
- Formular y resolver problemas donde se apliquen los contenidos que se estudian en cada una de las unidades.

OBJETIVOS, CONTENIDOS Y SUGERENCIAS METODOLÓGICAS POR TEMA

<u>Distribución de horas por unidades en cada uno de los grados:</u>

Unidades	h/c
Teoría de Números	50
Álgebra	50
Geometría	50
Matemática Discreta	50

Evaluaciones	40
Total	240

Décimo Grado:

Unidad: Teoría de Números:

Objetivos:

1. Resolver y formular problemas que exigen la comparación de números reales y la realización de operaciones racionales e irracionales con estos números en sus diferentes representaciones y la estimación de los cálculos.
2. Resolver y formular problemas donde se utilicen las definiciones de divisibilidad y congruencia aritmética, así como sus propiedades.
3. Resolver y formular problemas sobre ecuaciones en enteros utilizando los procedimientos estudiados y el método de descenso infinito.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Distintos tipos de números.	6
2	Divisibilidad	10
3	Congruencia aritmética módulo n	16
4	Ecuaciones en enteros	10
	Sistematización	8
Total		50

Contenidos:

1. Distintos tipos de números:

<u>Definiciones</u>: número natural, operaciones; número entero, operaciones; número racional, operaciones; número real, operaciones; parte entera y parte fraccionaria de un número.

Teoremas, procedimientos y relaciones: método de descenso infinito; propiedades de los números naturales, enteros, racionales y fraccionarios; propiedades de la parte entera y parte fraccionaria de un número.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

2. Divisibilidad:

Definiciones: número primo; números primos relativos; divisibilidad; máximo común divisor; mínimo común múltiplo

Teoremas, procedimientos y relaciones: caracterización para determinar si un número es primo; criba de Eratóstenes; infinitud del conjunto de los números primos; mayor potencia con que un número primo divide a n!; formas generales para escribir los números primos; propiedades de la divisibilidad; teorema fundamental de la aritmética; descomposición canónica de un número; cantidad de divisores de un número; suma y producto de los divisores de un número; criterios de divisibilidad; algoritmo de división; propiedades del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo; lema de Euclides.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

En esta parte el profesor-preparador o un estudiante previamente preparado debe abordar la definición de divisibilidad y deducir los criterios y propiedades fundamentales, por la importancia que tiene este contenido en los siguientes. A continuación se les puede orientar a los estudiantes que profundicen en los elementos teóricos que se abordan, de manera individual o en equipos, y que resuelvan guías de ejercicios mediante las cuales puedan fijar los elementos teóricos abordados. Más adelante se sugiere bibliografía que se puede utilizar.

3. Congruencia aritmética módulo n:

Definiciones: congruencia aritmética; clases residuales; sistema completo de restos módulo n.

Teoremas, procedimientos y relaciones: propiedades de la congruencia aritmética (incluyendo la caracterización); procedimiento para buscar últimas cifras de un número por medio de la congruencia; teorema de Wilson; teorema de Fermat; teorema de Euler.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

En esta parte se debe por lo menos en una clase abordar el concepto de congruencia y su relación con la divisibilidad, aquí se debe llegar a enunciar y demostrar los teoremas de Wilson, Fermat y Euler. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar ejercicios de cálculo y demostración donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y colectivo. Más adelante se sugieren la bibliografía que se puede utilizar.

4. Ecuaciones en enteros:

Definiciones: ecuación en enteros.

Teoremas, procedimientos y relaciones: procedimientos para resolver ecuaciones de la forma$ax + by + c = 0$; procedimientos para resolver ecuaciones de la forma$xy + ax + by + c = 0$.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

Unidad: Álgebra

Objetivos:

1. Interpretar y describir situaciones representadas a través ecuaciones algebraicas, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, así como algunas inecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
2. Resolver y formular problemas que conducen a algunos tipos de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, que requieren la integración de conocimientos sobre los dominios numéricos, las funciones y sus propiedades, para desarrollar métodos de resolución apropiados, incluyendo elementos de trigonometría.
3. Resolver y formular problemas sobre determinación de valores funcionales, propiedades y relaciones de las funciones, donde se incluya la resolución de ecuaciones funcionales utilizando los diferentes métodos objeto de estudio.
4. Resolver y formular problemas sobre razones, proporciones, progresiones, desigualdades y polinomios.
5. Aplicar el método de inducción completa a la obtención de nuevos conocimientos, a la determinación del término n-ésimo de una sucesión y a la demostración de proposiciones algebraicas, de teoría de números y geométricas.

Distribución de horas por subunidad temática

1	Factorización de expresiones algebraicas. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	4
2	Razones y Proporciones.	4
3	Progresiones aritméticas, geométrica y armónica	4
4	Polinomios	10

5	Funciones y ecuaciones funcionales	4
6	Desigualdades	8
7	Método de inducción completa	4
	Sistematización	12
Total		50

Contenidos:

1. Factorización de expresiones algebraicas. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas:

Definiciones: término; términos semejantes; expresión algebraica, operaciones; expresiones simétricas; expresiones alternadas; ecuación; sistema de ecuaciones; inecuación.

Teoremas, procedimientos y relaciones: reducción de términos semejantes; factorización de expresiones algebraicas; procedimientos para resolver ecuaciones lineales; procedimientos para resolver ecuaciones cuadráticas; procedimientos para resolver ecuaciones fraccionarias; procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones lineales; procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas; procedimiento para resolver inecuaciones lineales; procedimiento para resolver inecuaciones cuadráticas; procedimiento para resolver inecuaciones fraccionarias.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

2. Razones y Proporciones:

Definiciones: razón; proporción.

Teoremas, procedimientos y relaciones: propiedades de las razones; procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones utilizando razones; propiedades de las proporciones.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

3. Progresiones aritméticas, geométricas y armónicas:

Definiciones: progresión aritmética; media aritmética de dos números; progresión geométrica; media geométrica de dos números; progresión armónica; medias armónicas.

Teoremas, procedimientos y relaciones: relación para determinar la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, dados la cantidad de términos, el primero y el último término; relación para determinar la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, dados la cantidad de términos, el primer término y la diferencia;relación para determinar el término n-ésimo de una progresión aritmética; interpolación de una cantidad de medios aritméticos entre dos números dados; relación para determinar el término n-ésimo de una progresión geométrica; interpolación de una cantidad de medios geométricos entre dos números dados; relación para determinar la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, dados el primero, el último término y la razón; procedimiento para expresar una fracción decimal periódica como una fracción ordinaria equivalente; relación entre progresión aritmética y armónica; interpolación de una cantidad de medios armónicos entre dos números dados.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

4. POLINOMIOS:

Definiciones: Polinomio; raíz de un polinomio.

Teoremas, procedimientos y relaciones: método de los coeficientes indeterminados; relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica (teorema de Vieta); teorema sobre la raíz irracional de polinomios con coeficientes racionales; teorema fundamental del álgebra.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los de aplicación del método de los coeficientes indeterminados a la determinación de cociente y resto de la división de dos polinomios; aplicación del método de los coeficientes indeterminados a la demostración de que un polinomio es un cuadrado o un cubo perfecto; aplicación del método de los coeficientes indeterminados a expresar una fracción como suma de fracciones simples; aplicación del método de los coeficientes indeterminados a la determinación de la suma de una serie; determinación de las características de las raíces conocidos los coeficientes de la ecuación.

Sugerencias metodológicas:

Este tema es indispensable que bajo la guía del profesor-preparador los estudiantes reciban los contenidos que se declaran, pues es uno de los objetivos centrales de todos los eventos competitivos donde pueden participar, además de tener relaciones con otros contenidos de los ya abordados y de los siguientes, por ello hay que realizar las valoraciones de las interacciones matemáticas que se producen en este sentido. Es indispensable que los estudiantes sepan trabajar con el método de los coeficientes indeterminados, pues este se usa en problemas muy variados incluyendo algunos de cálculo integral. Es fundamental además el teorema fundamental del álgebra y el de Vieta. Se debe orientar además profundizar en los temas abordados, a partir de las interrelaciones entre todos los estudiantes del grupo de preparación y resolver gran cantidad de problemas variados.

5. Funciones y ecuaciones funcionales:

Definiciones: función; dominio de una función; funciones definidas por ramas; imagen de una función; extremos global de una función; cero de una función; signo de una función; función inyectiva; función sobreyectivas; igualdad de funciones; monotonía de una función; paridad de una función; Función simétrica respecto a $x = p$; función periódica; función aditiva; función multiplicativas; puntos fijos; operaciones con funciones (suma algebraica, multiplicación y división); función compuesta; función inversa; funciones elementales (constantes, lineales, cuadráticas, cúbica, raíz cuadrada, raíz cúbica, proporcionalidad inversa, modular, exponencial, logarítmica, seno, coseno, tangente, cotangente).

Teoremas, procedimientos y relaciones: propiedades de las funciones; evaluación de funciones en puntos de su dominio; restricción y ampliación del dominio de una función; restricción del conjunto de llegada de una función; procedimiento para determinar la paridad de una función; procedimiento para determinar la monotonía de una función; procedimiento para determinar la inyectividad de una función; procedimiento para determinar la simetría de una función con relación a la recta x = p; procedimiento para determinar la periodicidad de una función; relación entre monotonía e inyectividad; relación entre paridad e inyectividad; relación entre simetría respecto a $x = p$ e inyectividad; propiedades de las funciones periódicas;relación entre periodicidad e inyectividad; relación entre periodicidad y monotonía; construcción de la gráfica de una función; traslación de la gráfica de una función; dilatación y contracción de la gráfica de una función; propiedades de las operaciones con funciones (conmutativa de la suma algebraica y la multiplicación, Neutro de la suma algebraica y la multiplicación, Asociativa de la suma algebraica y la multiplicación, distributiva de la multiplicación respecto a la suma algebraica); procedimiento para determinar la composición de funciones; condición necesaria y suficiente para la existencia de la función inversa; procedimiento para determinar la inversa de una función.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los de representación gráfica y propiedades de funciones elementales dada la ecuación, determinación de funciones compuestas.

Sugerencias metodológicas:

Este es un tema que tampoco puede dejar de impartirse por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, por la importancia que tiene el concepto función dentro de la enseñanza de la Matemática. La discusión debe ser dirigida por el profesor preparador, para realizar precisiones de los conocimientos más importantes. El estudiante debe poder determinar las propiedades de las funciones analítica y gráficamente, y aplicarlas a la resolución de ecuaciones funcionales típicas. Se puede proponer como estudio independiente o por medio de las interacciones entre estudiantes del grupo de preparación, que los estudiantes profundicen en este tema y proponer gran número de problemas para que fijen las definiciones y propiedades estudiadas.

6. Desigualdades:

Definiciones: desigualdad; mínimo y máximo de una función cuadrática.

Teoremas, procedimientos y relaciones: relación de orden de los números reales; todo número real es mayor, igual o menor que cero; propiedades de las relaciones de desigualdad; desigualdad $x^2 \geq 0$; desigualdad triangular; procedimiento para determinar mínimo y máximo de una función cuadrática; desigualdad entre las potencias m – ésimas de n números naturales; determinación del máximo de un producto de valores con suma constante; desigualdad entre las medias aritmética, geométrica y armónica; desigualdad entre las medias potenciales.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los de demostrar desigualdades utilizando que los cuadrados no son negativos; demostrar desigualdades utilizando las desigualdades elementales de relación entre las medias aritmética, geométrica y armónica y su generalización a la desigualdad entre las medias potenciales; determinación del máximo de un producto de valores con suma constante.

Sugerencias metodológicas:

Este es un tema fundamental, en el cual el profesor-preparador debe planificar cómo va a fluir el intercambio entre los estudiantes y realizar las precisiones correspondientes, debido a la importancia que tiene dentro de todos los eventos competitivos que se desarrollan, así como su factibilidad en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes. Se deben enunciar y demostrar todas las desigualdades fundamentales que se abordan y utilizarlas en la demostración de otras desigualdades propuestas. Durante las discusiones en colectivo de los problemas propuestos se debe realizar el trabajo metacognitivo para valorar las formas de pensamiento de los estudiantes que evidencien la integración que deben realizar para demostrar las desigualdades, de modo que el resto de los estudiantes puedan seguir patrones similares.

7. Método de inducción completa:

Definiciones: principio de buen ordenamiento o principio del elemento mínimo.

Teoremas, procedimientos y relaciones: método de inducción completa; toda función, no creciente, definida de naturales en naturales, es constante a partir de un cierto valor; toda sucesión decreciente de números naturales es finita; segundo principio de inducción; desigualdades utilizando inducción completa.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los de demostrar propiedades de los números naturales utilizando el principio de inducción completa; demostrar desigualdades utilizando el principio de inducción completa; resolver problemas de divisibilidad utilizando el principio de inducción completa.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención pues se introduce un método de demostración que es general y se puede utilizar para demostrar proposiciones de las restantes ramas de la matemática. Aquí se puede intercambiar con los estudiantes sobre los conceptos básicos y proponerles que de forma independiente profundicen y resuelvan un gran número de problemas para que fijen el procedimiento para demostrar proposiciones variadas por este método. Este es un método importante en las relaciones culturales que se establecen en la Matemática. Se debe emplear la discusión de los problemas propuestos para valorar imprecisiones y realizar el análisis metacognitivo.

Unidad: Geometría

Objetivos:

1. Formular conjeturas y resolver ejercicios y problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de la sistematización de las propiedades fundamentales de los movimientos en el plano (traslación, reflexión y rotación), la composición de ellos y la homotecia.
2. Formular conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de los criterios suficientes para la igualdad y semejanza de triángulos, donde se utilicen propiedades de los triángulos, de los cuadriláteros, de la circunferencia y de las rectas notables.
3. Resolver y formular problemas donde se deduzcan las propiedades trigonométricas aplicables a la geometría, se utilicen las leyes de los senos y los cosenos, el teorema de Stewart y se demuestren identidades utilizando elementos geométricos.

4. Formular, conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de los teoremas relacionados con la concurrencia de rectas y la colinealidad de puntos.
5. Formular conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de los teoremas sobre cuadriláteros cíclicos, incluyendo el teorema de Casey.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Conceptos básicos de la Geometría Plana.	4
2	Movimientos en el plano.	4
3	Construcciones geométricas fundamentales	4
3	Igualdad de triángulos.	4
4	Semejanza de triángulos.	6
5	Trigonometría	6
5	Grupo de Teoremas de Pitágoras.	4
6	Concurrencia y colinealidad.	6
7	Cuadriláteros cíclicos.	8
	Sistematización	4
Total		50

Contenidos:

1. Conceptos básicos de la Geometría Plana:

<u>Definiciones</u>: ángulo como unión o intersección de semiplanos (incluidos sus bordes); clasificación de los ángulos; ángulos opuestos por el vértice; ángulos adyacentes; ángulos alternos; ángulos correspondientes; ángulos conjugados; triángulo; rectas notables en el triángulo (mediana, altura, bisectriz y mediatriz); puntos notables en el triángulo (baricentro, ortocentro, incentro y circuncentro); triángulo escaleno; triángulo

isósceles; triángulo equilátero; triángulo acutángulo; triángulo rectángulo; triángulo obtusángulo; cuadrilátero; paralelogramo, trapecio, trapezoide; rectángulo; rombo; cuadrado; trapecio rectángulo; trapecio isósceles; trapezoide simétrico; circunferencia; círculo; radio de una circunferencia; diámetro de una circunferencia; cuerda de una circunferencia; arco de circunferencia; sector circular; segmento circular; ángulo central en una circunferencia; ángulo inscrito en una circunferencia; ángulo seminscrito en una circunferencia; ángulo interior a una circunferencia; ángulo exterior a una circunferencia; recta tangente a una circunferencia; recta secante a una circunferencia; recta exterior a una circunferencia;

Teoremas, procedimientos y relaciones: propiedades de los ángulos; relación entre las amplitudes de pares de ángulos opuestos por el vértice; relación entre las amplitudes de pares de ángulos adyacentes;relación entre las amplitudes de pares de ángulos alternos entre dos rectas paralelas; relación entre las amplitudes de pares de ángulos correspondientes entre dos rectas paralelas; relación entre las amplitudes de pares de ángulos conjugados entre dos rectas paralelas; relación entre las amplitudes de pares de ángulos con sus lados respectivamente paralelos; relación entre las amplitudes de pares de ángulos con sus lados respectivamente perpendiculares; suma de los ángulos interiores de un triángulo; amplitud de un ángulo exterior a un triángulo; propiedades de las rectas notables; propiedades de los puntos notables;relaciones métricas en el triángulo (fórmulas para calcular área y perímetro); propiedades de los triángulo isósceles; propiedades de los triángulo equilátero; propiedades de los triángulo rectángulo; relaciones métricas para determinar si un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo; suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero; relaciones métricas en los cuadriláteros; propiedades del paralelogramo, propiedades del trapecio, propiedades del trapezoide; propiedades del rectángulo; propiedades del rombo; propiedades del cuadrado; propiedades del trapecio isósceles; propiedades del trapezoide simétrico; relación entre el radio y el diámetro de una circunferencia; relación de la amplitud del ángulo central en una circunferencia con los arcos; relación de la amplitud del ángulo inscrito en una circunferencia con los arcos; relación de la amplitud del ángulo seminscrito en una circunferencia con los arcos; relación de la amplitud del ángulo interior a una circunferencia con los arcos; relación de la amplitud del ángulo exterior a una circunferencia con los arcos; teorema de Tales; teorema sobre la perpendicularidad entre el radio y la tangente; relaciones métricas en la circunferencia y el círculo (área de un círculo y un sector circular, longitud de una circunferencia y de un arco); teorema de las transversales; relación entre las áreas y las bases de triángulos con igual altura; relación entre las áreas y las alturas de triángulos con igual bases; teorema de la bisectriz.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

2. Movimientos en el plano:

Definiciones: traslación; reflexión; rotación; composición de movimientos.

Teoremas, procedimientos y relaciones: propiedades de la traslación, la reflexión, la rotación y la composición de movimientos.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

3. Construcciones geométricas fundamentales:

Teoremas, procedimientos y relaciones: construir un segmento de longitud dada, a partir de un punto P sobre una recta dada y en el sentido que se indique; verificar la relación existente entre las longitudes de dos segmentos; dibujar puntos equidistantes (a una distancia dada) sobre un segmento, a partir de un punto dado P; construir un segmento que sea la suma de otros dados; construir un segmento que sea la diferencia de dos segmentos dados; construir un triángulo de lados dados; verificar si un segmento es la suma (o la diferencia) de otros segmentos dados; medir un ángulo; construir un ángulo de medida dada; construir un ángulo recto; trasladar un ángulo, corriendo el vértice sobre uno de sus lados; girar un ángulo en torno a su vértice; trasladar un ángulo a otra región del plano; verificar la relación existente entre las medidas de dos ángulos; construir un ángulo que sea la unión de varios ángulos dados; construir un ángulo que sea la diferencia de dos ángulos dados; verificar si un ángulo es la unión (o la diferencia) de dos ángulos; estimar la medida de un ángulo; construir la mediatriz de un segmento; determinar el punto medio de un segmento; determinar la relación existente entre los puntos de la mediatriz de un segmento y los puntos extremos de éste; verificar si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento; construir la perpendicular a una recta desde un punto exterior a la misma; construir la perpendicular a una recta que pase por un punto de la misma; calcular la distancia entre un punto y una recta; determinar si dos rectas son paralelas; construir rectas paralelas a una dada; construir una paralela a una recta dada, que pase por un punto exterior a la recta; calcular la distancia entre dos rectas paralelas; construir la bisectriz de un ángulo; descubrir la relación existente entre los puntos de la bisectriz de un ángulo y los lados de éste; construir una circunferencia dado su centro y radio; construir una circunferencia que pase por tres puntos dados; construir tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella; construir tangentes a una circunferencia desde uno de sus puntos.

Problemas: problemas donde se apliquen los procedimientos estudiados.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes. En este tema se debe trabajar con los concursantes la utilización del Geogebra para la construcción de figuras elementales y en la comprobación de propiedades geométricas.

4. Igualdad de triángulos:

Definiciones: Igualdad de triángulos

Teoremas, procedimientos y relaciones: criterio lll para igualdad de triángulos; criterio lal para igualdad de triángulos; criterio ala para igualdad de triángulos; relación entre lados y ángulos de triángulos iguales; todas las rectas notables relativas a la base de un triángulo isósceles coinciden; todo punto situado en la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo; todo punto situado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

5. Semejanza de triángulos.

Definiciones: figuras semejantes; triángulos semejantes; razón de semejanza.

Teoremas, procedimientos y relaciones: criterios de semejanza de triángulos aa, pap, ppp; teorema fundamental de semejanza; relación entre las medianas de triángulos semejantes; relación entre las alturas de triángulos semejantes; relación entre las bisectrices de triángulos semejantes; relación entre los perímetros de triángulos semejantes; relación entre las áreas de triángulos semejantes.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

6. Trigonometría:

Definiciones: razones trigonométricas; círculo trigonométrico; generalización del concepto de ángulo; funciones trigonométricas.

Teoremas, procedimientos y relaciones: relación entre las medidas en radianes y grados; razones trigonométricas de ángulos notables; razones trigonométricas de ángulos axiales; fórmulas de reducción de los tres cuadrantes; identidades trigonométricas; seno de la diferencia de dos ángulos; seno de la suma de dos ángulos; coseno de la suma de dos ángulos; coseno de la diferencia de dos ángulos; tangente de la suma de dos ángulos; tangente de la diferencia de dos ángulos; cotangente de la suma de dos ángulos; cotangente de la diferencia de dos ángulos; seno del ángulo duplo; coseno del ángulo duplo; tangente del ángulo duplo; cotangente del ángulo duplo; ley de los senos y los cosenos.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los de transformar suma de senos en producto; transformar diferencia de senos en producto; transformar suma de cosenos en producto; transformar diferencia de cosenos en producto.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención por sus aplicaciones algebraicas y geométricas, aunque aquí se pueden abordar los conceptos básicos mediante intercambios entre los estudiantes, y proponerles que de forma independiente profundicen por la bibliografía recomendada. Se puede proponer gran número de problemas para que ellos fijen las definiciones y propiedades estudiadas, siempre enfatizando en las relaciones culturales de este tema con los de Álgebra y Geometría.

7. Grupo de Teoremas de Pitágoras:

Teoremas, procedimientos y relaciones: teorema de Pitágoras; teorema de la altura; teorema de los catetos.

Problemas: problemas donde se apliquen los teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

8. Concurrencia y colinealidad:

Definiciones: ceviana; punto de Ceva; concurrencia de rectas; colinealidad de puntos.

Teoremas, procedimientos y relaciones: teorema de Ceva; teoremas sobre concurrencia de medianas, alturas y bisectrices interiores de un triángulo; punto de Gergonne; punto de Nagel o isoperimétrico; teorema de Menelao; teorema de Desargues; teorema de Pascal; teorema de Papus; teorema de Simpson.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención pues es uno de los elementos más utilizado en eventos competitivos a todos los niveles, además de introducir elementos teóricos que son nuevos para los estudiantes y que en un momento determinado pueden facilitarle el trabajo. Aquí para el estudio independiente debe quedar profundizar en el tema de manera independiente o mediante la interacción entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores, y resolver gran variedad de ejercicios para fijar la teoría abordada.

9. Cuadriláteros cíclicos:

Definiciones: potencia de puntos; cuadrilátero cíclico; eje y centro radical.

Teoremas, procedimientos y relaciones: teorema sobre las longitudes de las tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior; condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea cíclico:la suma de los ángulos opuestos sea 180 grados, ángulos iguales en posición de inscritos sobre uno de los lados del cuadrilátero como cuerda,potencia de un punto interior a la circunferencia, potencia de un punto exterior a la circunferencia, igualdad de la diferencia de dos pares de ángulos consecutivos del cuadrilátero, ángulo que forma la bisectriz de las rectas que contienen a dos lados opuestos con los otros dos lados; teorema de Ptolomeo; teorema de Miquel.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención pues es uno de los más utilizados en eventos competitivos a todos los niveles, además de introducir elementos teóricos que son nuevos para los estudiantes y que en un momento determinado pueden facilitarle el trabajo. Aquí para el estudio independiente debe quedar profundizar en el tema y resolver gran variedad de problemas para fijar la teoría abordada. Del mismo modo deben planificarse interacciones entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores y el intercambio sobre las soluciones que ofrezcan.

Unidad: Tópicos de Matemática Discreta.

Objetivos generales:

1. Resolver y formular problemas de conteo y distribución aplicando el principio de Dirichlet, el de la multiplicación, y el de las inclusiones y exclusiones.
2. Resolver y formular problemas aplicando el principio del elemento extremo y el de invarianza.
3. Aplicar los principios de la teoría combinatoria para resolver problemas de conteo y distribución más complejos y realizar el cálculo de probabilidades de sucesos aleatorios.
4. Resolver y formular problemas de razonamiento lógico relacionados con: la teoría de conjuntos, la lógica formal, la paridad y relacionados con coloraciones, tableros y juegos.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Lógica y Conjuntos.	8
2	Paridad	4
3	Teoría Combinatoria	4
4	Principio de Dirichlet	8
5	Principio del Elemento Extremo	4

6	Principio de Invarianza	8
7	Coloraciones, tableros y juegos.	4
	Sistematización	10
Total		50

1. Lógica y conjuntos:

Definiciones: axioma; teorema; enunciado; operaciones lógicas: conjunción, disyunción, negación, condicional y bicondicional; polinomio booleano; formas proposicionales; tautología; contradicción; implicación lógica; cuantificadores: universal y existencial; conjunto; elemento; cardinal de un conjunto; conjuntos equipotentes; igualdad de conjuntos; conjunto potencia; operaciones con conjuntos: intersección, unión, diferencia, complemento y diferencia simétrica; producto cartesiano; partición de un conjunto; partición de un conjunto; relaciones; dominio e imagen; relación inversa; relación de equivalencia.

Teoremas, procedimientos y relaciones: tablas de valores de verdad de las operaciones lógicas; formas de denotar un conjunto: notación descriptiva, notación tabular, notación constructiva y notación de intervalo; método de conteo; regla de la suma; regla del producto; diagramas de Venn – Euler; relación de inclusión; propiedades de la igualdad de conjuntos: reflexiva, transitiva y simétrica; propiedades de la intersección: idempotencia, identidad, conmutatividad, asociatividad, inclusiones, conjuntos disjuntos; propiedades de la unión: idempotencia, identidad, conmutatividad, asociatividad, distributividad con la intersección; propiedades de la diferencia; propiedades del complemento incluyendo las leyes de Morgan; propiedades de la diferencia simétrica incluyendo conmutatividad, asociatividad y distributividad de la intersección respecto a la diferencia simétrica; propiedades del producto cartesiano; principio de las inclusiones y las exclusiones; Métodos de demostración: directo, indirecto, reducción al absurdo.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención por la incidencia que tiene en los restantes temas y puesto que se introducen métodos generales de demostración. Aquí para el estudio independiente debe quedar profundizar en el tema y resolver gran variedad de problemas para fijar la teoría abordada. Del mismo modo deben planificarse interacciones entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores y el intercambio sobre las soluciones que ofrezcan.

2. Paridad:

Definiciones: número par; número impar.

Teoremas, procedimientos y relaciones: la suma de dos números pares o dos impares es par; la suma de un número par con uno impar es impar; el producto de números es impar si y solo si todos los factores son impares.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

3. Teoría Combinatoria:

Definiciones: variaciones sin repetición de n objetos tomados k a k; permutaciones sin repetición de n objetos; combinaciones sin repetición de n objetos tomados k a k; variaciones con repetición de n objetos tomados k a k; permutaciones con repetición de n objetos; combinaciones con repetición de n objetos tomados k a k

Teoremas, procedimientos y relaciones: Relación para calcular el número de variaciones sin repetición de n objetos tomados k a k; fórmula para determinar el número de permutaciones sin repetición de n objetos; relación para calcular el número de combinaciones sin repetición de n objetos tomados k a k; relación para calcular el número de variaciones con repetición de n objetos tomados k a k; fórmula para determinar el número de permutaciones con repetición de n objetos; relación para calcular el número de combinaciones con repetición de n objetos tomados k a k; teorema del binomio de Newton; identidad de Pascal; cantidad de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de n elementos.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los de conteo.

Sugerencias metodológicas:

Es indispensable que se aborden con los estudiantes los elementos teóricos y ejemplos de cómo utilizarlos en la resolución de problemas y luego a través del trabajo independiente resolver sistemas de problemas para fijar la teoría abordada. Del mismo modo deben planificarse interacciones entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores y el intercambio sobre las soluciones que ofrezcan.

4. Principio de Dirichlet:

Teoremas, procedimientos y relaciones: principio de Dirichlet; generalización del principio de Dirichlet.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los vinculados con juegos, tableros, coloraciones y geometría.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención pues es uno de los más utilizado en eventos competitivos a todos los niveles. El profesor-preparador debe planificar los intercambios a realizar para que los concursantes obtengan las relaciones generales. Aquí para el estudio independiente debe quedar profundizar en el tema y resolver gran variedad de problemas para fijar la teoría abordada. Del mismo modo deben planificarse interacciones entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores y el intercambio sobre las soluciones que ofrezcan.

5. Principio del Elemento Extremo:

Teoremas, procedimientos y relaciones: principio del elemento extremo.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los de aplicación al álgebra, la teoría de números y la geometría.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención pues es uno de los más utilizado en eventos competitivos a todos los niveles. El profesor-preparador debe planificar los intercambios a realizar para que los concursantes obtengan las relaciones generales. Aquí para el estudio independiente debe quedar profundizar en el tema y resolver gran variedad de problemas para fijar la teoría abordada. Del mismo modo deben planificarse interacciones entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores y el intercambio sobre las soluciones que ofrezcan.

6. Principio de Invarianza:

Teoremas, procedimientos y relaciones: principio de invarianza.

Problemas: problemas donde se apliquen los teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando aquellos que traten sobre expresiones o valores numéricos invariantes, restos de la división invariantes, así como tendencia de crecimiento o decrecimiento invariantes.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención pues es uno de los más utilizado en eventos competitivos a todos los niveles. El profesor-preparador debe planificar los intercambios a realizar para que los concursantes obtengan las relaciones generales. Aquí para el estudio independiente debe quedar profundizar en el tema y resolver gran variedad de problemas para fijar la teoría abordada. Del mismo modo deben planificarse interacciones entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores y el intercambio sobre las soluciones que ofrezcan.

7. Coloraciones, tableros y juegos:

Teoremas: de estructuras básicas; de Beatty; y lema de Köning.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas, priorizando los relacionados con: determinación de elementos invariantes; trabajo hacia atrás; trabajo hacia adelante; pruebas no constructivas; buscar simetrías; descomposición en partes más pequeñas; planteamiento de juegos como una variante de un juego conocido; variantes de los juegos del tipo Nim; juegos con tableros de ajedrez; juegos con números.

Sugerencias metodológicas:

A este tema se le debe prestar especial atención pues es uno de los más utilizado en eventos competitivos a todos los niveles. El profesor-preparador debe planificar los intercambios a realizar para que los concursantes obtengan las relaciones generales. Aquí para el estudio independiente debe quedar profundizar en el tema y resolver gran variedad de problemas para fijar la teoría abordada. Del mismo modo deben planificarse interacciones entre estudiantes del mismo grado o de grados superiores y el intercambio sobre las soluciones que ofrezcan.

Undécimo Grado

Unidad: Teoría de Números:

Objetivos:

1. Resolver y formular problemas donde se utilicen las definiciones de divisibilidad y congruencia aritmética, así como sus propiedades, con mayor complejidad que los del décimo grado.
2. Resolver y formular problemas más complejos, sobre ecuaciones en enteros utilizando los procedimientos estudiados y el método de descenso infinito.
3. Resolver y formular problemas sobre funciones aritméticas más complejos que los del décimo grado.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Divisibilidad	10
2	Congruencia aritmética módulo n	10
3	Ecuaciones en enteros	12
4	Funciones aritméticas.	8
	Sistematización	10
Total		50

Contenidos:

1. Divisibilidad:

Teoremas, procedimientos y relaciones: teorema de Bezout.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado.

Sugerencias metodológicas:

En esta parte el profesor-preparador o un estudiante previamente preparado debe recordar la definición de divisibilidad, los criterios y propiedades fundamentales. A continuación se les puede orientar a los concursantes que resuelvan de manera individual los problemas que se propongan y que durante los intercambios que se produzcan entre estudiantes del mismo grado o de los tres grados, se discutan las vías de solución ofrecidas a los problemas propuestos y se aborden así mismo ideas que pudieran haber encontrado durante la revisión bibliográfica desarrollada.

2.Congruencia aritmética módulo n:

Definiciones: Definición de inverso multiplicativo módulo n; orden, raíces primitivas e índices módulo n; restos cuadráticos.

Teoremas, procedimientos y relaciones: Relación del inverso multiplicativo módulo n con el módulo; procedimiento para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones en congruencias; teorema de los restos chinos

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado, incluyendo resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones en congruencias.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas de cálculo y demostración donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados. Los contenidos que se abordan en este grado son complejos para ellos en estas edades y muy útiles en la resolución de problemas de olimpiadas a diferentes niveles.

3.Ecuaciones en enteros:

Definiciones: ternas pitagóricas; ecuaciones de Fermat; ecuación de Pell.

Teoremas, procedimientos y relaciones: métodos fundamentales para resolver ecuaciones en enteros (descomposición, utilizando desigualdades, paramétrico, aritmética modular, inducción matemática, descenso infinito), procedimientos para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, procedimientos para resolver ecuaciones exponenciales en enteros (con dos o tres variables); relaciones para determinara ternas pitagóricas; procedimiento para resolver ecuaciones de Fermat; procedimiento para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - Ny^2 = \pm a$; procedimiento para la resolución de ecuaciones de Pell.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado, incluyendo resolver problemas donde se utilice el descenso infinito.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas de cálculo y demostración donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados. Los contenidos que se abordan en este grado son complejos para ellos en estas edades y muy útiles en la resolución de problemas de olimpiadas a diferentes niveles. Aquí es indispensable usar el método de descenso infinito para demostrar que no existen más soluciones que las triviales.

4. **Funciones aritméticas:**

Definiciones: función parte entera; función parte fraccionaria, función suma de los dígitos de un número.

Teoremas, procedimientos y relaciones: propiedades de las funciones parte entera y parte fraccionaria: dominio, monotonía, imagen, máximo y mínimo global, intersección con el eje "y", ceros, signo, sobreyectividad, inyectividad, paridad, periodicidad, aditiva, multiplicativa, puntos fijos, gráfica. Otras propiedades de la función parte entera, propiedades de la función suma de los dígitos de un número.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y en este grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

Unidad: Álgebra

Objetivos:

1. Interpretar y describir situaciones representadas a través ecuaciones algebraicas, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, así como algunas inecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
2. Resolver y formular problemas que conducen a algunos tipos de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, que requieren vincular los conocimientos sobre los dominios numéricos, las funciones y sus propiedades, para desarrollar métodos de resolución apropiados, incluyendo elementos de trigonometría.
3. Resolver y formular problemas donde se apliquen la definición y las propiedades de las funciones, las definiciones de función compuesta, inversa, aditiva, multiplicativa, las funciones elementales y los procedimientos para resolver ecuaciones funcionales por los métodos de factorización, el método de resolver un sistema de ecuaciones, asignar valores a las variables, de cambio de variable y de sustitución trigonometría.
4. Resolver y formular problemas sobre razones, proporciones, y progresiones.
5. Resolver y formular problemas sobre desigualdades.
6. Resolver y formular problemas sobre polinomios.
7. Aplicar la definición y operaciones con números complejos en distintas representaciones a la interpretación, descripción de situaciones y al cálculo de cantidades de magnitud, incluyendo la demostración de identidades algebraicas utilizando las raíces n – ésimas de la unidad, así como la aplicación de los números complejos al trabajo con polinomios.
8. Resolver problemas en los que se apliquen los teoremas de Descartes, de Gua y de Newton (relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica), el teorema sobre la raíz

racional, el trabajo con polinomios irreducibles sobre los números racionales, incluyendo el criterio de Eisenstein.

9. Demostrar desigualdades utilizando propiedades de las desigualdades, el orden de los números reales, los conocimientos sobre funciones cuadráticas y las desigualdades notables, en particular, utilizando las desigualdades elementales de relación entre las medias aritmética, geométrica y armónica y su generalización a las medias potenciales, así como las desigualdades de Cauchy – Schwarzt, Nesbitt, Tchebychev, Jensen, Hölder, Minkowski, Bernoilli, Schür, el lema de Titu y los teoremas de reacomodo y Muirhead.
10. Resolver y formular problemas donde se apliquen las definiciones de razones trigonométricas, radianes, relación entre radianes y grados, ángulos coterminales, razones trigonométricas de ángulos notables, círculo trigonométrico, razones trigonométricas de ángulos axiales, fórmulas de reducción, signos de las razones trigonométricas, identidades trigonométricas, leyes de los senos y de los cosenos, incluyendo la utilización de transformaciones trigonométricas a la demostración de desigualdades.
11. Resolver problemas donde se aplique el método de inducción completa a la obtención de nuevos conocimientos, a la determinación del término n-ésimo de una sucesión y a la demostración de proposiciones algebraicas, de teoría de números y geométricas.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Ecuaciones, inecuaciones y Sistemas de Ecuaciones.	4
2	Razones y Proporciones.	4
3	Progresiones y sucesiones recurrentes.	4
4	Polinomios	10
5	Funciones y ecuaciones funcionales	4
6	Desigualdades	8

7	Trigonometría	4
8	Método de inducción completa	4
	Sistematización	8
Total		50

Contenidos:

1. Ecuaciones, inecuaciones y Sistemas de Ecuaciones:

Definiciones: ecuaciones con radicales; ecuaciones exponenciales; ecuaciones logarítmicas; ecuaciones modulares; inecuaciones exponenciales; inecuaciones logarítmicas.

Teoremas, procedimientos y relaciones: procedimiento para resolver ecuaciones con radicales; procedimiento para resolver ecuaciones exponenciales; procedimiento para resolver ecuaciones logarítmicas; procedimiento para resolver ecuaciones modulares; procedimiento para resolver inecuaciones exponenciales; procedimiento para resolver inecuaciones logarítmicas.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, con una adecuada orientación de la bibliografía que pueden utilizar los estudiantes y los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

2. Razones y Proporciones: Repaso de los contenidos estudiados en el décimo grado.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

3. Progresiones y sucesiones recurrentes:

Definiciones: sucesión recurrente de orden k; sucesión de Fibonacci; polinomio característico de una ecuación de recurrencia.

Teoremas, procedimientos y relaciones: suma de una cantidad infinita de términos de una progresión geométrica; determinar la forma recurrente de sucesiones; ecuaciones de recurrencia de sucesiones conocidas como: progresión geométrica, progresión aritmética, sucesión de Fibonacci, sucesión de los cuadrados, sucesión de los cubos, sucesiones periódicas, sucesión de los coeficientes del cociente de dos polinomios; sucesión de la suma de los elementos de una sucesión recurrente de orden k; sucesión de la suma de los elementos de sucesiones conocidas como: progresión geométrica, progresión aritmética, sucesión de Fibonacci, sucesión de los cuadrados, sucesión de los cubos, sucesiones periódicas, sucesión de los coeficientes del cociente de dos polinomios; determinar el polinomio característico de una ecuación de recurrencia; término general de una sucesión conocida su ecuación de recurrencia.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado priorizando la determinación de la forma recurrente de una sucesión y su forma general.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados. Los contenidos que se abordan en este grado son muy útiles en la resolución de problemas de olimpiadas a diferentes niveles. Aquí es indispensable establecer las relaciones con el método de los coeficientes indeterminados.

4. Polinomios:

Definiciones: número complejo; polinomios irreducibles sobre los números racionales, reales y complejos.

Teoremas, procedimientos y relaciones: notaciones de un número complejo; operaciones básicas con números complejos; potencias de un número complejo; teorema de Moivre; raíces n – ésimas de la unidad; identidades algebraicas utilizando las raíces n – ésimas de la unidad; raíz n – ésima de un número complejo; teorema sobre la raíz imaginaria de polinomios con coeficientes reales; regla de los signos de Descartes; teorema de Gua; relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica (teorema de Newton); teorema sobre la raíz irracional; criterio de Eisenstein.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

5. Funciones y ecuaciones funcionales:

Definiciones: periodicidad de de orden n; puntos fijos

Teoremas, procedimientos y relaciones: métodos para resolver ecuaciones funcionales: factorización, sustituir la(s) variable(s) por valores adecuados del dominio, cambio de variables, formando un sistema de ecuaciones, utilizando inducción completa, expresión constante, aplicando propiedades de los números naturales (el conjunto de los números naturales está acotado inferiormente, todo subconjunto de números naturales tiene un elemento mínimo), selección de la solución, puntos fijos; aplicación de la periodicidad de orden n a la solución de ecuaciones funcionales; el uso de las desigualdades a la solución de ecuaciones funcionales; resolver ecuaciones funcionales clásicas: aditiva, multiplicativa, $f(x+y)=f(x)f(y)$, y $f(xy)=f(x)+f(y)$.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

6. Desigualdades:

Definiciones: función convexa; función cóncava

Teoremas, procedimientos y relaciones: desigualdades entre las medias aritmética, geométrica y armónica; desigualdades entre las medias potenciales; desigualdad de Cauchy – Schwarzt; desigualdad de Nesbitt; desigualdad de Tchebychev; desigualdad de Jensen; desigualdad de Hölder; desigualdad de Schür; lema de Titu; teorema de reacomodo; teorema de Muirhead.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

7. Trigonometría.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado. Se deben resolver desigualdades utilizando transformaciones trigonométricas.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

8. Método de inducción completa:

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas, teniendo en cuenta que este contenido sirve de base a los restantes.

Unidad: Geometría.

Objetivos:

1. Formular conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de la sistematización de las propiedades fundamentales de los movimientos en el plano (traslación, reflexión y rotación), la composición de ellos y la homotecia.
2. Resolver problemas de construcción utilizando instrumentos de trazado y comprobándolo mediante la utilización del Geogebra.
3. Formular conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de los criterios suficientes para la igualdad y semejanza de triángulos, donde se utilicen propiedades de los triángulos, de los cuadriláteros y de las rectas notables.

4. Resolver y formular problemas donde se deduzcan las propiedades trigonométricas aplicables a la geometría, se utilicen las leyes de los senos y los cosenos, el teorema de Stewart y se demuestren identidades utilizando elementos geométricos.
5. Formular, conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de los teoremas relacionados con la concurrencia de rectas y la colinealidad de puntos.
6. Formular conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de los teoremas sobre cuadriláteros cíclicos, incluyendo el teorema de Casey.
7. Resolver problemas de la geometría analítica de la recta en el plano y de las curvas de segundo grado, que les permitan apreciar las ventajas de la integración de los conocimientos algebraicos y geométricos y pasar de las propiedades de estas curvas a su representación gráfica o analítica o viceversa, incluyendo la determinación de lugares geométricos y la utilización de las coordenadas polares.
8. Resolver problemas de la geometría utilizando las definiciones y propiedades de los segmentos dirigidos y los vectores, incluyendo productos escalares y vectoriales.
9. Formular, conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de la definición y propiedades de la inversión.
10. Formular, conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de la definición y propiedades de las relaciones anarmónica y armónica, así como de lo relativo a polo y polar.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Movimientos y Homotecia.	4
2	Igualdad y semejanza de triángulos.	4
3	Trigonometría.	4
4	Concurrencia y colinealidad.	4
5	Cuadriláteros cíclicos.	4

6	Geometría Analítica. Vectores.	8
7	Inversión.	8
8	Anarmónico, armónico y polar.	8
	Sistematización	6
Total		50

Contenidos:

1. Movimientos y Homotecia.

Definiciones: homotecia; sistemas de puntos homotéticos

Teoremas, procedimientos y relaciones: la figura homotética de un segmento es otro segmento paralelo al dado, cuya longitud está en una relación con el dado igual a la razón de homotecia; si se tienen dos sistemas homotéticos y se unen dos puntos cualesquieras de uno de ellos y sus puntos homólogos en el otro, se obtienen dos segmentos que son paralelos, donde la razón entre sus longitudes coincide con la razón de homotecia; la figura homotética de una recta es otra recta paralela a ella; el ángulo que forman dos rectas es igual al que forman sus rectas homotéticas; la figura homotética de un polígono es otro polígono semejante al mismo, y la razón de semejanza coincide con la de homotecia; la figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia; las tangentes en puntos homólogos de curvas homotéticas son paralelas; dos sistemas de puntos son homotéticos si existen en su plano dos puntos tales que, al unir uno de ellos con los puntos del primer sistema y el otro con los puntos homólogos del segundo sistema se obtienen segmentos paralelos que están en la misma razón; dos polígonos semejantes son homotéticos; dos circunferencias cualesquiera son siempre homotéticas; si se tienen dos circunferencias homotéticas, entonces los centros de homotecia dividen armónicamente a la recta de los centros.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado, priorizando problemas donde se vincule la homotecia con los movimientos del plano que estudiaron en el grado precedente.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

2. Igualdad y semejanza de triángulos:

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

3. Trigonometría:

Teoremas, procedimientos y relaciones: ley de los senos; ley de los cosenos; teorema de Stewart; identidades en las cuales se tenga como premisa que la suma de los ángulos es 180º.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

4. Concurrencia y colinealidad:

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

5. Cuadriláteros cíclicos:

Teoremas, procedimientos y relaciones: teorema de Casey.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado y las estudiadas en este grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

6. Geometría Analítica. Vectores.

Definiciones: sistema de coordenadas rectangulares; coordenadas cartesianas de un punto; distancia entre dos puntos; línea recta; ecuación cartesiana de una recta; distancia de un punto a una recta; segmentos dirigidos; igualdad de segmentos dirigidos; vector y sus elementos; vector nulo; vector opuesto; vector de posición de un punto; producto escalar de dos vectores; producto vectorial de dos vectores; parábola como lugar geométrico; circunferencia como lugar geométrico; elipse como lugar geométrico; lado recto de la elipse; excentricidad de la elipse; hipérbola como lugar geométrico; hipérbola equilátera; asíntotas de la hipérbola; cónicas y cono de revolución; coordenadas polares de un punto.

Teoremas, procedimientos y relaciones: relación para determinar la distancia entre dos puntos; determinación del área de un triángulo dadas las coordenadas de los vértices; condición para que tres puntos estén alineados; procedimiento para dividir un segmento en una razón dada; punto medio de un segmento; relación para determinar la pendiente de una recta; relación entre la pendiente de la recta y el ángulo que esta forma con la parte positiva del eje x; determinación de la ecuación cartesiana de una recta; intersección de rectas; ángulo entre dos rectas; condición para que dos rectas sean perpendiculares; relación para determinar la distancia de un punto a una recta; procedimiento para sumar vectores (reglas del triángulo y del paralelogramo); propiedades de la adición de vectores; sustracción de vectores; multiplicación de un vector por un escalar; determinación del vector de posición de un punto P que divide a un segmento AB en una razón dada; propiedades del producto escalar de dos vectores; propiedades del producto vectorial de dos vectores; ecuación de la parábola; relación de posición entre parábola y recta; ecuación de la circunferencia; relación de posición entre recta y circunferencia; relación de posición entre circunferencias; ecuación del eje radical de circunferencias; ecuación de la elipse; relación de posición entre la elipse y una recta; relación de posición entre elipse y circunferencia; relación de posición entre elipse y parábola; ecuación de la hipérbola; relación de posición entre recta e hipérbola; relación de posición entre hipérbola y parábola; relación de posición entre hipérbola y circunferencia; relación de posición entre hipérbola y elipse; relación de posición entre hipérbolas; tipo de cónica por medio de los coeficientes de la ecuación general de la curva; ecuaciones por traslaciones paralelas de los ejes; ecuaciones por giros de los ejes coordenados; relación entre las coordenadas polares y las rectangulares; trazado de curvas dada su ecuación polar; ecuación de las curvas de segundo grado en coordenadas polares.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

7. Inversión.

Definiciones: inversión en el plano; puntos inversos; curvas inversa

Teoremas, procedimientos y relaciones: propiedades de la inversión: el inverso del inverso de un punto es el mismo punto, el inverso de un punto situado en la circunferencia de inversión es el mismo punto, el inverso de un punto fuera de la circunferencia está dentro de la misma y viceversa, el inverso de una recta que pasa por el centro de inversión es ella misma, el inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que tampoco pasa por el centro de inversión, una circunferencia que pasa por el centro de inversión se transforma en una recta que no pasa por dicho centro, una recta que no pasa por el centro de inversión se transforma en una circunferencia que pasa por dicho centro, la inversión es una transformación conforme (conserva los ángulos), Si A´ y B´ son los respectivos inversos de A y B en una inversión con centro en O y radio r, entonces $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB$, una circunferencia ortogonal a la de inversión se mantiene fija mediante la aplicación de esta.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

Anarmónico, armónico y polar:

Definiciones: polo de un punto con respecto a una circunferencia, polar de una recta con respecto a una circunferencia; puntos conjugados con respecto a una circunferencia; relación anarmónica de cuatro puntos en línea recta; relación armónica de cuatro puntos en línea recta; relación anarmónica de cuatro rectas en un haz; relación armónica de cuatro rectas en un haz;

Teoremas, procedimientos y relaciones: si dos relaciones armónicas con tres puntos fijos coinciden, entonces el cuarto punto de cada una de las dos relaciones coincide; si A, B, C, D están en ese orden en una recta y se cumplen dos de las condiciones siguientes se cumple la tercera: la razón (ABCD) es armónica, XB es la bisectriz interior del $\angle AXC$, $XB \perp XD$; principio de dualidad; punto medio y conjugación armónica; si una recta de un plano corta a un haz armónico, los puntos de corte forman una cuarteta armónicañ construcción de una recta polar utilizando regla; relación entre recta polar y cuádruplas armónicas.

Problemas: problemas donde se apliquen las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

Unidad: Matemática Discreta.

Objetivos:

1. Resolver y formular problemas de conteo y distribución, aplicando el principio de Dirichlet, el de la multiplicación, el de las inclusiones y exclusiones.
2. Resolver y formular problemas aplicando el principio del elemento extremo y el de invarianza al álgebra, la teoría de números y la geometría, incluyendo problemas sobre expresiones o valores numéricos invariantes, restos de la división invariantes, así como tendencia de crecimiento o decrecimiento invariantes.
3. Resolver problemas de conteo y distribución más complejos donde se apliquen los principios de la teoría combinatoria y realizar el cálculo de probabilidades de sucesos aleatorios.
4. Resolver y formular problemas de razonamiento lógico relacionados con: la teoría de conjuntos, la lógica formal, la paridad y relacionados con coloraciones, tableros y juegos.
5. Resolver problemas de juegos con invariantes, donde se trabaje hacia delante y hacia atrás, por pruebas no constructivas, por simetrías, por descomposición en partes más pequeñas, planteándolo como variantes de un juego conocido.

6. Resolver y formular problemas de razonamiento lógico relacionados con el principio de conteo doble, incluyendo problemas donde se involucren sumas combinatorias y se utilice la identidad de Vandermonde.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Lógica y Conjuntos	8
2	Paridad	4
3	Teoría Combinatoria	6
4	Principio de Dirichlet	6
5	Principio del Elemento Extremo	4
6	Principio de Invarianza	8
7	Coloraciones, tableros y juegos.	4
8	Conteo Doble	4
	Sistematización	6
Total		50

Contenidos:

1. Lógica y Conjuntos:

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

2. Paridad: Repaso de los contenidos estudiados en décimo grado.

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

3. Teoría Combinatoria y Probabilidades: Repaso de los contenidos estudiados en décimo grado.

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

4. Principio de Dirichlet: Repaso de los contenidos estudiados en décimo grado sobre el Principio de Dirichlet y su generalización.

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

5. Principio del Elemento Extremo: Repaso de los contenidos estudiados en el décimo grado.

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

6. Principio de Invarianza: Repaso de los contenidos estudiados en décimo grado.

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

7. Coloraciones, tableros y juegos. Repaso de los contenidos estudiados en décimo grado.

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en décimo grado.

Sugerencias metodológicas:

Este tema se puede proponer como estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

8. Conteo doble:

Teoremas, procedimientos y relaciones: principio de conteo doble; sumas combinatorias; identidad de Vandermonde.

Problemas: problemas donde se apliquen los teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas.

Sugerencias metodológicas:

Esta parte se debe abordar por el profesor-preparador o un concursante previamente preparado, pues son contenidos complejos para ellos en estas edades y además muy útiles en la resolución de ejercicios de olimpiadas a diferentes niveles. Luego para el trabajo independiente se sugiere abordar problemas donde se apliquen los elementos teóricos estudiados y orientar bibliografía donde ellos puedan sistematizar y profundizar en estos contenidos. Siempre utilizando el trabajo individual y grupal a partir de intercambios entre concursantes de este grado o de los tres grados.

Duodécimo Grado:

En este grado se realiza una sistematización, integración y profundización de los contenidos estudiados en los grados anteriores, es por ello que las sesiones e preparación se deben desarrollar mediante el estudio independiente o mediante las interacciones entre estudiantes de este grado o de estos con estudiantes de grados superiores, después de una adecuada orientación de los problemas que deben resolver. Se debe buscar un momento oportuno para discutir los elementos que los estudiantes pudieron buscar, aclarar las dudas que pudieran presentar, integrar los conocimientos que adquirieron y valorar metacognitivamente en colectivo las actividades desarrolladas.

Unidad: Teoría de Números:

Objetivos:

1. Resolver y formular problemas, con mayor complejidad donde se utilicen las definiciones de divisibilidad y congruencia aritmética, así como sus propiedades.
2. Resolver y formular problemas más complejos, sobre ecuaciones en enteros utilizando los procedimientos estudiados y el método de descenso infinito.
3. Resolver y formular problemas más complejos, sobre funciones aritméticas.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Divisibilidad	4
2	Congruencia aritmética módulo n	4
3	Ecuaciones en enteros	4

4	Funciones aritméticas.	4
5	Sistematización	34
Total		50

<u>Problemas</u>: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad y generalidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en grados anteriores.

Unidad: Álgebra

Objetivos:

1. Interpretar y describir situaciones representadas a través ecuaciones algebraicas, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, así como algunas inecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
2. Resolver y formular problemas que conducen a algunos tipos de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones trascendentes, que requieren vincular los conocimientos sobre los dominios numéricos, las funciones y sus propiedades, para desarrollar métodos de resolución apropiados, incluyendo elementos de trigonometría.
3. Resolver y formular problemas sobre determinación de valores funcionales, propiedades y relaciones de las funciones, donde se incluya la resolución de ecuaciones funcionales utilizando los diferentes métodos objeto de estudio.
4. Resolver y formular problemas sobre razones, proporciones, progresiones, desigualdades y polinomios.
5. Resolver problemas sobre aplicacióndel método de inducción completa a la obtención de nuevos conocimientos, a la determinación del término n-ésimo de una sucesión y a la demostración de proposiciones algebraicas, de teoría de números y geométricas.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Ecuaciones, inecuaciones y Sistemas de Ecuaciones.	4
2	Razones y Proporciones.	4
3	Progresiones. Sucesiones recurrentes.	4
4	Polinomios	4
5	Funciones y ecuaciones funcionales	4
6	Desigualdades	4

7	Trigonometría	4
8	Método de inducción completa	4
	Sistematización	18
Total		50

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad y generalidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en grados anteriores.

Unidad: Geometría

Objetivo:

Formular conjeturas y resolver problemas de demostración, construcción, y cálculo a través de los criterios suficientes para la igualdad y semejanza de triángulos, el grupo de teoremas de Pitágoras, las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, los teoremas relacionados con la concurrencia de rectas y la colinealidad de puntos, así con los cuadriláteros cíclicos, transformaciones del plano (movimientos, homotecia, inversión), anarmónico, armónico y polar, así como geometría analítica y vectores.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Movimientos y Homotecia.	4
2	Igualdad y semejanza de triángulos.	4
3	Trigonometría.	4
4	Concurrencia y colinealidad.	4
5	Cuadriláteros cíclicos.	4
6	Geometría Analítica. Vectores.	4
7	Inversión.	4
8	Anarmónico, armónico y polar.	4
	Sistematización	18
Total		50

Problemas: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad y generalidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en grados anteriores.

Unidad: Matemática Discreta

Objetivos:

1. Resolver y formular problemas de conteo y distribución aplicando el principio de Dirichlet, el de la multiplicación, el de las inclusiones y exclusiones.
2. Resolver y formular problemas aplicando el principio del elemento extremo y el de invarianza.
3. Resolver problemas donde se apliquen los principios de la teoría combinatoria para resolver problemas de conteo y distribución más complejos y realizar el cálculo de probabilidades de sucesos aleatorios.
4. Resolver y formular problemas de razonamiento lógico relacionados con: la teoría de conjuntos, la lógica formal, la paridad y relacionados con coloraciones, tableros y juegos.

Distribución de horas por subunidad temática		h/c
1	Razonamiento Lógico	4
2	Lógica y Conjuntos	4
3	Paridad	4
4	Teoría Combinatoria	5
5	Principio de Dirichlet	5
6	Principio del Elemento Extremo	4
7	Principio de Invarianza	6
8	Coloraciones, tableros y juegos.	4
9	Conteo Doble	4
	Sistematización	10
Total		50

<u>Problemas</u>: problemas donde se apliquen, con mayor nivel de complejidad y generalidad, las definiciones, teoremas, procedimientos y relaciones estudiadas en grados anteriores.

INDICACIONES METODOLÓGICAS GENERALES:

Para poder planificar la preparación de manera diferenciada se necesita conocer el dominio de los contenidos que deben poseer los estudiantes. Se debe diagnosticar, además, el compromiso con la tarea, la tenacidad, el compromiso de cada estudiante con el grupo, valorar el predominio de objetivos individuales o grupales, para incidir en que predominen estos últimos.

En el proceso de diagnóstico se debe priorizar la observación pedagógica del profesor-preparador y la observación intencionada de los restantes miembros del grupo de preparación en todas las actividades que se desarrollen. Del mismo modo que, los elementos que se obtengan no deben constituir un inventario de procesos aislados, se necesita además, analizarlo de forma integral determinando las potencialidades y las causas que originan las insuficiencias, para incidir en su solución. Para ello el profesor-preparador debe determinar las necesidades, potencialidades y contradicciones internas que pueden servir de fuentes para el desarrollo del grupo.

Según Castellanos (1997) dentro de las características que permiten determinar si un estudiante es talentoso se encuentran:

1. Capacidad intelectual y aprendizaje:

- Muestran logros relevantes o excepcionales en alguna(s) área(s), materia(s) o asignatura(s), o disciplina(s) específica(s).
- Tienen una elevada capacidad para aprender, retener y aplicar los conocimientos en nuevas situaciones.
- Pueden llamar la atención por la amplitud de sus conocimientos generales o específicos.
- Muestran un alto grado de indagación, intereses y curiosidad, lo que puede expresarse en sus preguntas y conductas en el aula, así como fuera de la escuela.
- Comprenden y manipulan con facilidad símbolos, conceptos e ideas abstractas y complejas.
- Pueden formular principios, leyes y generalizaciones sin grandes esfuerzos.
- Manifiestan especial independencia en sus ideas, juicios y razonamientos.
- Muestran gran habilidad para autorregularse en su aprendizaje.
- Se orientan flexible y rápidamente en los nuevos problemas y situaciones.

- Muestran disfrute con lo intelectual: imaginan, fantasean, son rápidos en establecer relaciones y manipular ideas.
- No les gusta aceptar declaraciones autoritarias sin previo examen crítico.
- Es frecuente que hablen con fluidez y riqueza expresiva, manifestando una comprensión y uso avanzado del lenguaje.
- Son observadores penetrantes y atentos: se fijan en los detalles y captan con rapidez similitudes y diferencias.

2. Potencial creativo:

- Pueden ser sumamente imaginativos e inventivos.
- Manifiestan un comportamiento muy original en la producción de ideas, objetos, soluciones, realizando aportes novedosos en la clase y/o fuera de ella.
- Con frecuencia ven las relaciones más inusuales en lugar de las convencionales.
- Pueden manifestar un sentido del humor muy agudo: ven el aspecto humorístico de lo cotidiano y aprecian rápidamente los matices y significados que para otros quedan ocultos.
- Pueden disfrutar con la auto-expresión, en especial a través de la discusión, pero también a través del arte.
- Pueden ser arriesgados y especulativos; disfrutan con los desafíos y lo complejo.

3. Motivación:

- Manifiestan un interés intenso, a veces apasionado, por una o varias áreas de investigación intelectual, o de la producción en algún campo especial, aunque puede manifestar intereses muy amplios y difusos.
- Se concentran profundamente en aquellas áreas que los motivan; sienten necesidad de lograr dominio en estas áreas; pueden ser muy perseverantes en la búsqueda de sus objetivos.
- Con frecuencia expresan ideales y ambiciones muy elevados.
- Tienen una idea clara de sus proyectos futuros en la esfera de su interés.
- Disfrutan de las discusiones relacionadas con los problemas de ética, moral, filosofía, así como de las conversaciones sobre los problemas existenciales y del mundo.

4. Otros:

- Pueden demostrar su originalidad y productividad a través de manifestaciones muy específicas y en áreas disímiles, por ejemplo, a través de expresiones artísticas, o en esferas como la tecnología, el deporte, las relaciones interpersonales, etc.
- Suelen ser muy críticos con respecto a los demás y a sí mismos, lo cual puede tornarlos en perfeccionistas.
- Pueden ser muy apreciados y respetados por sus compañeros: llevan a los demás a trabajar en los planes que ellos se proponen y pueden ser líderes en sus grupos.

El hecho de que en un estudiante no se manifiesten estos aspectos de forma espontánea no quiere decir que no pueda ser un talento, pues pueden darse situaciones externas que frenen la manifestación de estos aspectos.

Dentro de las cualidades de la personalidad de los concursantes en Matemática que deben potenciarse se encuentran: perseverancia, laboriosidad, responsabilidad, curiosidad, espíritu crítico y autocrítico, colectivismo, sentido de pertenencia con el grupo de preparación, voluntad para asumir riesgos y seguridad en sí mismos. Se necesita diagnosticar además la esfera de autorregulación ejecutora, con sus unidades psíquicas constitutivas de: estado cognitivo, el estado metacognitivo y la instrumentación ejecutora.

Mediante el diagnóstico del estado cognitivo se puede determinar el nivel de conocimientos que posee el concursante en Matemática y en el nivel en que se encuentran, sobre todo determinar en este sentido las posibilidades que tiene cada estudiante de aplicarlo, integrarlo con otros conocimientos y generalizarlo. Por su parte, en el diagnóstico del estado metacognitivo se debe determinar el conocimiento que tiene cada concursante en Matemática sobre sus conocimientos. Mientras en el diagnóstico de la instrumentación ejecutora se debe diagnosticar las manifestaciones del funcionamiento instrumental del concursante en Matemática, es decir sus acciones, operaciones, habilidades, capacidades.

En la preparación de concursantes en Matemática se debe potenciar el desarrollo del pensamiento divergente, aunque debe favorecerse el dominio de los procedimientos lógicos del convergente. El pensamiento divergente está relacionado con el creativo, como aquel donde se desarrollan de manera constante nuevas combinaciones de ideas que permiten al estudiante encontrar soluciones originales a los problemas propuestos.

En la resolución de un problema, se puede trabajar de forma directa o lineal, por la utilización del sistema de conocimiento, mediante un cuidadoso análisis conducente al éxito; pero el problema puede parecer muy difícil y revelarse la solución de repente, una solución sorprendente y simple, mediante un razonamiento poco común; en este caso interviene el pensamiento divergente. Este no solo sirve para resolver problemas, sino también para ver nuevos enfoques e ideas novedosas.

Este último aspecto es la manifestación más fehaciente de la contribución al desarrollo de este pensamiento en la preparación de concursantes en Matemática. Aquí se analizan varias alternativas creativas, basadas en la imaginación desarrollada por los estudiantes en la solución de los problemas. Este aspecto se favorece por la socialización, sistematización y eventual integración de los conocimientos dentro del grupo de preparación; en este caso ellos defienden sus criterios, pero aceptan las críticas, siempre que se convenzan de las dificultades que se les señala. Es importante tener en cuenta la concentración de los concursantes en Matemática, pues les permite decantar de su cúmulo de conocimientos los más útiles en un momento específico; mientras mejor concentración posean podrán enfocar sus esfuerzos hacia los elementos necesarios en cada momento.

El presente programa se estructura por grado, llevando de frente los diferentes temas a los que se les debe brindar especial atención hasta el Concurso Nacional. La búsqueda, discusión y valoración de información de diferentes fuentes será necesaria a lo largo de todo el curso.

Los métodos deben atender la implicación personal de los concursantes en la búsqueda, sistematización, integración y gestión de los conocimientos de los que deben apropiarse durante la preparación, es por ello que deben predominar los métodos productivos. Es imprescindible orientar a los concursantes en cómo realizar la búsqueda de conocimientos en bibliografía impresa y digital, del mismo modo de cómo utilizar los intercambios con otros estudiantes y con personas del entorno en función de profundizar en sus conocimientos.

Para ello las formas de organización predominante debe ser el intercambio entre los concursantes, el trabajo en equipos y las discusiones de ideas creativas que les puedan surgir durante la resolución de problemas o de otras a las que tengan acceso durante la revisión bibliográfica que realizan.

Dentro de los medios deben desempeñar un rol fundamental las nuevas tecnologías de la informática a partir de la utilización de Sitios Web, Intranet, y otros utilitarios como Geogebra y otros sistemas matemáticos.

Durante el control y la evaluación del aprendizaje de los concursantes se debe determinar hasta qué punto los concursantes logran resolver los problemas propuestos, las causas de los errores que cometen y la forma de pensamiento que utilizaron para solucionarlos, de modo que se puedan determinara sus dificultades y potencialidades en diferentes tipos de problemas para poder atender sus necesidades y aprovechar sus potencialidades en función del colectivo. La evaluación debe promover la discusión de alternativas y procedimientos para la solución de los problemas, empleando la crítica y la autocrítica como método habitual para la evaluación de los compañeros y la auto-evaluación.

La evaluación debe ser un proceso continuo que estimule a los concursantes a continuar esforzándose por superar sus dificultades y utilizar sus potencialidades en función del grupo de preparación. Se debe orientar a los estudiantes sobre los objetivos que deben vencer según las indicaciones del presente documento, sobre las vías que debe utilizar para su preparación, cómo van a ser evaluados y los criterios que se van a utilizar para realizarla. Se debe potenciar el intercambio de criterios, la autoevaluación, la heteroevaluación de cada concursante a sus compañeros y la coevaluación, a partir de la valoración del trabajo realizado y la utilización de la crítica y la autocrítica.

El profesor-preparador debe trabajar por que se establezcan relaciones de ayuda mutua entre los concursantes. Debe potenciar, además, el desarrollo de cualidades como: perseverancia, laboriosidad, responsabilidad, curiosidad, espíritu crítico y autocrítico, colectivismo, sentido de pertenencia con el grupo de preparación, voluntad para asumir riesgos y seguridad en sí mismos.

Durante el proceso de preparación de concursantes en Matemática se puede implementar una estrategia formada por seis etapas, con un sistema de acciones que les posibilitará a los profesores-preparadores dirigir este proceso.

Primera etapa: Estructuración de los grupos de preparación

Objetivo: determinar la composición de los grupos de preparación, de manera de garantizar su continuidad al iniciar cada curso escolar, para que puedan ser atendidos con vistas a lograr su formación integral, y resultados en las etapas de los concursos de conocimientos y habilidades hasta el nivel nacional. (Esto no excluye la posibilidad de poder incluir otros estudiantes que evidencien potencialidades durante el desarrollo de las actividades docentes y los eventos competitivos que se desarrollan).

Acciones:

- Encuentros de preparación de los miembros del grupo con estudiantes de las Secundarias Básicas que les tributan para desarrollar motivaciones hacia la preparación. En estas preparaciones, abordar elementos de historia de las Matemáticas, historia de los concursos y de olimpiadas a diferentes niveles, resolución de problemas de razonamiento, elementos de cultura y curiosidades matemáticas.
- Intercambio de los miembros del grupo de preparación con los profesores en Matemática y profesores responsables de grupos de noveno grado de las escuelas Secundarias Básicas que les tributan, para realizar nominaciones de estudiantes para desempeñarse como concursantes en Matemática. En estos intercambios los miembros del grupo de preparación deben abordar características que se necesitan para lograr resultados en su preparación dentro de la comunidad de conocimientos.
- Realizar un coloquio con los padres de los estudiantes nominados por los profesores, compañeros, o mediante autonominaciones, para explicarles las actividades que se realizan dentro de los grupos de preparación y las perspectivas que brindan en su formación.
- Con los elementos detectados, conformar un potencial de selección, y realizar un primer diagnóstico de los estudiantes incluidos.
- Realizar un coloquio con los miembros del grupo de preparación que van a participar en su estructuración. Seleccionar los instrumentos para medir cada indicador previsto y elaborar las actividades.
- Realizar un coloquio con los estudiantes que forman parte del potencial de selección para explicarles cómo va a funcionar el proceso, las cualidades que deben poseer para tener éxito en esta tarea. Explicar las particularidades de la preparación y de los concursos de conocimientos a distintos niveles, así como también los logros de la escuela, la provincia y el país. Explicar también las posibilidades relacionadas con su futuro profesional, a partir de los resultados laborales de compañeros que durante su etapa estudiantil fueron miembros de los grupos de preparación. En este coloquio, siempre que sea posible, deben participar compañeros con éxito durante su vida estudiantil y/o laboral, antiguos miembros de los grupos de preparación, para que aborden sus vivencias.
- Desarrollar una visita a la sala de historia de la escuela para evidenciar los resultados en los eventos competitivos que se desarrollaron en cursos anteriores y conocer qué hacen en la actualidad los antiguos participantes en estos eventos, para motivarlos a ingresar en los grupos de preparación.
- Aplicar los instrumentos de diagnóstico elaborados para determinar potencialidades de cada aspirante. Estos permiten valorar los niveles de motivación de los estudiantes; sus expectativas de logro; nivel de

satisfacción; actitud ante el éxito y el fracaso; influencia de las barreras personales y familiares; la concentración; el pensamiento creativo y lógico; la imaginación; las interconexiones presentes en su manera de enfrentar de manera integral los problemas que resuelve; la perseverancia; la laboriosidad, entre otras.

- Complementar el diagnóstico realizado con los nuevos elementos detectados por los instrumentos aplicados.
- Ordenar los estudiantes en grupos según las potencialidades evidenciadas en el diagnóstico realizado, para ofrecerle la atención personalizada que necesita dentro de los grupos regulares y dentro del grupo de preparación estructurado.
- Estructurar los sistemas de ayuda, de acuerdo a los elementos diagnosticados, con representantes de todos los grados de modo que los concursantes se puedan integrar para realizar una colaboración con los restantes en los contenidos estudiados.

Segunda etapa: Estructuración y utilización de los materiales bibliográficos.

<u>Objetivo</u>: Organizar los materiales bibliográficos y planificar cómo se va a desarrollar la interiorización y utilización de estos de manera sistemática durante la preparación, que para cada estudiante tiene un período de tres años.

<u>Acciones</u>:

- Organizar, por parte del profesor-preparador, teniendo en cuenta el presente programa y las necesidades del grupo de preparación, los contenidos existentes en las bibliografías con las que cuentan.
- Crear, por parte del profesor-preparador, un espacio interactivo, en formato digital, que permita interactuar con los contenidos que aparecen en las bibliografías. Debe haber un espacio, además, para que los miembros de los grupos de preparación ofrezcan sus soluciones a los problemas propuestos y los restantes miembros del grupo de preparación puedan ofrecer comentarios, recomendaciones y valoraciones de las soluciones, utilizando la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.
- Crear, por parte del profesor-preparador, un centro de documentación donde se ubiquen, de manera organizada, los libros, artículos y sistemas de problemas en formato impreso, para que puedan ser utilizados por los concursantes en Matemática. En este centro de documentación se deben incluir los

materiales en formato impreso a los que tenga acceso el grupo de preparación, incluidas las respuestas creativas que hayan ofrecido algunos miembros del grupo de preparación a problemas resueltos.

- Definir, por parte del profesor-preparador, los sistemas de ayuda, de acuerdo a los elementos diagnosticados, para el estudio de las bibliografías disponibles, de modo que los concursantes de todos los grados se puedan integrar para colaborar entre ellos.

Tercera etapa: socialización de los conocimientos dentro del grupo de preparación.

Objetivo: Socializar los conocimientos dentro del grupo de preparación, sentando las bases para las etapas subsiguientes, en tanto se contribuye a su sistematización.

Acciones:

- Diagnosticar, por parte del profesor-preparador, los conocimientos que poseen los concursantes en Matemática de su grupo de preparación.
- Dosificar, por parte del profesor-preparador, los contenidos a impartir, a partir de este programa.
- Valorar, por parte del profesor-preparador, las potencialidades de cada miembro del grupo de preparación, de acuerdo con el diagnóstico realizado, para impartir contenidos específicos en el marco de este. Estructurando el trabajo colaborativo con representantes de todos los grados.
- Orientar a los miembros del grupo de preparación los contenidos específicos que deben preparar de acuerdo con el diagnóstico realizado. El profesor-preparador debe dejarles claros los objetivos y el material bibliográfico a utilizar.
- Desarrollar las sesiones de preparación de acuerdo con lo planificado, de manera de potenciar un aprendizaje desarrollador y por ende, el establecimiento de relaciones entre los contenidos estudiados. Orientar los sistemas de problemas disponibles, definiendo los sistemas de ayuda a desarrollar durante la resolución de los problemas propuestos. En su desarrollo se debe utilizar como medio de comprobación la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación. El profesor-preparador debe estar atento al desarrollo de las actividades y realizar precisiones siempre que sean necesarias, para que los estudiantes enfoquen su atención hacia los elementos fundamentales.
- Invitar a personas del entorno que puedan aportar elementos importantes de alguno de los contenidos de preparación para intercambiar con el grupo de preparación. Dentro de este personal se encuentran los antiguos miembros del grupo de preparación y otros estudiosos de contenidos específicos que puedan favorecer la preparación integral de los estudiantes.

Cuarta etapa. Exteriorización de conocimientos del grupo de preparación hacia el contexto

Objetivo: Exteriorizar los conocimientos, para que puedan ser llevados al contexto, del mismo modo, que se reciban influencias socio-culturales del entorno para su formación integral.

Acciones:

- Planificar un sistema de preparación para los estudiantes de las enseñanzas precedentes del entorno donde se ubica la escuela o del entorno individual de cada miembro del grupo de preparación.
  - Realizar, por parte del profesor-preparador, la preparación de los profesores de las escuelas del entorno, desde el punto de vista académico y metodológico para dirigir la preparación, así como también determinar la forma en que se va a impartir cada objetivo del programa.
  - Orientar a cada miembro del grupo de preparación sobre los contenidos que debe impartir a los estudiantes de grados precedentes. En las primeras edades la preparación se debe basar en problemas de razonamiento matemático que los motiven hacia la actividad, brindarles curiosidades, analizar acertijos y hablarles sobre la historia de las matemáticas y las olimpiadas de conocimientos.
  - Preparar las actividades que se van a realizar, las que deben ser concebidas mediante un análisis grupal de la comunidad de conocimientos.
  - Realizar las actividades y evaluarlas mediante la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación.
- Realizar talleres relacionados con la Matemática en las propias escuelas.
  - Determinar qué actividades se pueden realizar para motivar al entorno hacia el estudio de la matemática. Deben incluirse problemas de razonamiento matemático, curiosidades, acertijos, elementos de historia de la Matemática y de las olimpiadas de conocimientos.
  - Orientar a cada miembro del grupo de preparación sobre sus responsabilidades en las actividades a desarrollar.
  - Coordinar con la dirección de la escuela la realización de las actividades.
  - Realizar las actividades y evaluarlas mediante la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación.
- Realizar talleres con maestros, profesores, familiares de estudiantes de las enseñanzas precedentes que tributan a la escuela donde están enclavado el grupo de preparación.
  - Determinar qué actividades se pueden realizar para motivar a la comunidad sobre la necesidad y la importancia de la Matemática, así como también sobre las ventajas que tiene para los jóvenes

integrar los grupos de preparación. Deben incluirse aplicaciones de la Matemática a la vida, problemas para el desarrollo del razonamiento, curiosidades, acertijos, historia de la Matemática y de las olimpiadas de conocimientos.

- Orientar a cada miembro del grupo de preparación sobre sus responsabilidades en las actividades a desarrollar.
- Realizar las actividades. Todas las actividades que se desarrollen se deben evaluar mediante la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.

Quinta etapa: Combinación de los conocimientos para el fomento de la competitividad

Objetivo: Sistematizar, integrar y generalizar los conocimientos de los miembros del grupo de preparación para lograr una sana competitividad, que se manifieste en su futuro profesional y redunde en resultados en los eventos competitivos.

Acciones:

- Programar los eventos competitivos a desarrollar con los concursantes en Matemática en cada etapa de preparación y divulgar el cronograma.
- Formar equipos para los eventos competitivos, a partir de los sistemas de ayuda definidos.Se realiza con representación de todos los grados, se ubica un estudiante de duodécimo como capitán y los estudiantes de onceno y décimo se incluyen, de modo que el nivel académico sea similar y que exista en cada equipo algún estudiante que colabore con los restantes en cada disciplina estudiada, respetando la afinidad de los estudiantes para que se sientan a gusto en la labor que desarrollan.
- Garantizar las condiciones necesarias para el desarrollo de los eventos competitivos.
    - Coordinar con la dirección del centro para lograr una adecuada organización de los eventos a desarrollar y garantizar el apoyo material en tal sentido.
    - Orientar a los estudiantes sobre los objetivos que se van a evaluar en cada etapa de la preparación (concursos a nivel de base, municipal, provincial y nacional), cómo se deben preparar, cómo y cuándo se van a evaluar.
    - Preparar los temarios a aplicar. Se deben evaluar objetivos que estén en correspondencia con los contenidos a vencer en cada etapa y que estén balanceados en el tipo de pregunta y su complejidad.

- Realizar las actividades competitivas dentro del grupo de preparación.Cada actividad competitiva consiste en una prueba contra reloj, una individual y una colectiva, donde los equipos acumulan puntos, que permiten establecer una emulación. Se realizan cada quince días.

  La prueba contra reloj se estructura con preguntas de razonamiento para contestarse en el menor tiempo posible; el tiempo que se utiliza incide de manera directa en la puntuación final. Estas pruebas tienen una duración máxima de 20 minutos y un valor de 5 a 10 puntos, en dependencia de la complejidad de los ejercicios que se proponen, siempre declarando con antelación a los estudiantes cuál es su valor. Ellos favorecen la formación psicológica de los participantes para los eventos competitivos. Los estados de tensión que se crean, en muchas ocasiones, son superiores a los existentes dentro de una competencia.

  La prueba individual consta de tres problemas con un valor de 21 puntos, siete puntos por cada problema, según las normas vigentes de las olimpiadas internacionales y los concursos nacionales. Los temarios están compuestos por una pregunta de gran complejidad (la tres), una de complejidad media (la dos) y otra de menor complejidad (la uno). En estas preguntas se evalúan las cuatro disciplinas básicas de la preparación: Álgebra, Geometría, Teoría de Números y Matemática Discreta, con un equilibrio en el número y complejidad de las preguntas.

  El tiempo debe ser menor al del concurso de la etapa para la cual se está trabajando en ese momento, para adaptar a los estudiantes a trabajar en menos tiempo del que dispondrán en el evento real, en consecuencia es recomendable tener en cuenta que el concurso de base debe tener una duración de dos horas, el de municipio tres horas y el de provincia y nación deben durar cuatro horas; por lo tanto, en la primera fase las pruebas deben tener una duración de una hora y media, en la siguiente fase dos horas y en las dos últimas dedicar tres horas. En cada prueba individual que realicen los concursantes en Matemática, dentro de la preparación se deben acostumbrar a dedicar un tiempo inicial a analizar cada pregunta antes de decidir cuál va a resolver primero, pues el grado de dificultad para el estudiante no tiene por qué ser el mismo concebido en el temario.

  En la prueba por equipos se proponen uno o dos problemas, los estudiantes deben resolver de forma colectiva en 10 minutos. De manera general, en estos se necesita del trabajo de todos, pues son problemas que se deben resolver por partes, donde cada integrante debe realizar una actividad. Es imprescindible en ellos distribuir el trabajo, para poder llegar a la solución general del problema. El valor de la prueba es de cinco a 10 puntos, en dependencia de la complejidad de los problemas propuestos, siempre declarando con anterioridad el valor asignado. En la calificación se tiene en cuenta el ingenio de la solución ofrecida y la búsqueda de varias vías.

La nota final del equipo en cada examen es la suma de los promedios que logran en la prueba contra reloj y la individual con la puntuación de la prueba por equipos. Esto permite establecer un eficiente trabajo cooperativo. Los de grados superiores deben ayudar en la preparación de los de nuevo ingreso, si no lo hacen, estos afectarían su resultado individual, aunque la influencia se ejerce también en sentido contrario, pues pueden existir estudiantes de grados inferiores que posean mayor preparación en algunos contenidos específicos.

- Realizar las actividades competitivas de los equipos ganadores con similares de otras escuelas. Esto favorece la preparación para participar en eventos competitivos de mayor envergadura.
- Realizar la discusión de los resultados de cada evento competitivo.

Se deben discutir con el grupo de preparación las vías de solución que se ofrecieron, para por medio de un análisis crítico, valorar las posibilidades de darle solución a los problemas; se deben analizar también las vías utilizadas, aunque no pudieran encontrar la solución final. Este análisis es importante y siempre que sea posible debe escribirse, dejando la memoria escrita sobre el análisis metacognitivo que desarrolla cada estudiante en la solución de los problemas de los exámenes. Las respuestas incorrectas también se deben analizar, sin reprochar el error, pues su análisis permite que los concursantes en Matemática sepan en qué contextos, determinados contenidos no permiten resolver el problema y por qué. Se debe hacer reflexionar al estudiante sobre el error cometido, pues esto favorece que pueda actuar de manera lógica ante un problema que no ha resuelto y permite conocer sus posibilidades para rectificar los propios errores.

Mediante el análisis colectivo se puede llegar al final de cada vía trabajada, cada vía es vista por los miembros del grupo de preparación; del mismo modo, los estudiantes pueden valorar hasta qué punto es factible cada vía en la solución de problemas específicos. En esta etapa se utiliza la autoevaluación en la misma medida en que cada estudiante realiza valoraciones de su desempeño durante los exámenes; se utiliza la coevaluación, donde cada par de estudiantes de un mismo equipo realizan evaluaciones mutuas del trabajo desarrollado y además la heteroevaluación del trabajo de cada estudiante por el profesor-preparador y por el resto del grupo de preparación.

Sexta etapa: Evaluación de la preparación sobre la base de la gestión de conocimientos

Objetivo: valorar la eficacia de cada etapa, de manera que sirva de retroalimentación para perfeccionarla en lo sucesivo y a la vez, mejorar las etapas que siguen.

Se desarrolla de forma paralela a las restantes, pues se debe evaluar el funcionamiento parcial de todas ellas.

Acciones:

Evaluación del comportamiento de cada una de las etapas anteriores.

ORIENTACIONES SOBRE LOS TIPOS DE EJERCICIOS QUE NO DEBEN DEJAR DE HACERSE, POR LOS TEMAS ESPECÍFICOS QUE SE TRABAJAN:

TEORÍA DE NÚMEROS:

Distintos tipos de números:

Se deben trabajar problemas donde se utilicen las características que distinguen a cada uno de los dominios numéricos estudiados, como los que se muestran a continuación:

1. Probar que una ecuación no tiene soluciones naturales positivas, como por ejemplo ($a^2 - 3b^2 = 0$). (en los cuales se utilice el método de descenso infinito).
2. Ordene en forma ascendente $\frac{1992}{1997}$, $\frac{1993}{1998}$ y $\frac{1994}{1999}$
3. Determine "n" para que $\sqrt{30 - 2\sqrt{n+1}} \in N$
4. Demuestre que $\frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \notin Q$

Divisibilidad:

Se deben trabajar problemas donde se utilicen la definición y propiedades de la divisibilidad, como los que se muestran a continuación:

1. Determina los valores de a y b para que el número $\overline{b5a4}$ sean divisibles por 15.
2. Pruebe que los números de la forma $n^3 - n$ son múltiplos de 6, para todo número entero n.

3. Pruebe que si a y b son números enteros cualesquiera, entonces el número entero $a^5b - ab^5$, es siempre múltiplo de 5.
4. Determina todos los enteros positivos n para los cuales existe un entero m tal que $2n - 1$ divide a $m^2 + 9$.
5. Sea n un número natural. Demuestra que si $2n + 1$ y $3n + 1$ son cuadrados perfectos, entonces n es divisible por 40.
6. Demuestra que la diferencia entre un número y su cuadrado es par.
7. Divide el número 99 en dos sumandos positivos tales que el primero sea divisible por 4 y el segundo por 5. Halla todos los casos.
8. Encuentra el menor número natural por el que se debe multiplicar 240 para obtener un cuadrado perfecto.
9. Demuestra que $n^4 + 4$ con n entero positivo no múltiplo de 5, siempre es divisible por 5.
10. Calcula todos los pares de números naturales (a ; b) tales que mcd(a ; b) = 16 y el mayor es a = 144.
11. Tres personas tienen \$275, \$150 y \$225, que desean emplear completamente en comprar camisas del mayor precio posible por unidad. ¿Cuántas camisas puede comprar cada uno?
12. Un número N está compuesto por factores 2, 3 y 5; si al dividirlo por 2 se le eliminan 24 divisores, al dividirlo por 3 se le eliminan 18 divisores y al dividirlo por 5 se le eliminan 12 divisores. Hallar N.
13. El número N es tal que 125N tiene el doble número de divisores que N, 81N tiene el triplo y 4096N tiene el cuádruplo, determina el valor de $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

<u>Congruencia aritmética módulo n:</u>

Se deben trabajar problemas donde se utilicen la definición y propiedades de la congruencia (incluyendo la demostración de los criterios de divisibilidad), como los que se muestran a continuación:

En esta parte se deben trabajar ejercicios donde se utilicen, se pueden resolver ejercicios como:

1. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número 2137^{753}?
2. Determina el resto de la división de 3^{1989} por 8.

3. Calcula el resto de la división de $22^{55} + 55^{22}$ por 7
4. Demuestra que para cualquier valor natural de n, el número $8^{2n+1} + 7^{n+2}$ es divisible por 57
5. Sean p + 1 y 2p + 1 números primos, demostrar que x^{2p-1} es divisible por
6. 8(p + 1)(2p + 1), si x es primo con 2(p + 1)(2p + 1)
7. Sea p un número primo, p > 3, $n \in N$ no divisible por p. Demuestra que existe un número k que cumple una de las condiciones siguientes:

a) o bien $n^{3k} – 1$ es múltiplo de p o $n^{3k} + 1$ lo es.

b) o bien $n^{3k-1} – 1$ es múltiplo de p o $n^{3k-1} + 1$ lo es.

8. Probar que 2n + 3m es divisible por 17 si y solo si 9n + 5m lo es
9. Si p es primo, demuestra que $2^p + 3^p$ no puede ser una potencia perfecta.
10. Determina todas las ternas ordenadas de números primos (p, q, r), tal que: $p / q^r + 1$, $q / r^p + 1$, $r / p^q + 1$.
11. Cinco enteros positivos a, b, c, d y e mayores que 1 satisfacen las siguientes condiciones:

    a (b + c + d + e) = 128

    b (a + c + d + e) = 155

    c (a + b + d + e) = 203

    d (a + b + c + e) = 243

    e (a + b + c + d) = 275

    Determina los valores de a, b, c, d y e

<u>Ecuaciones en enteros:</u>

En esta parte se deben trabajar ejercicios donde se utilicen los procedimientos de resolución de ecuaciones en enteros, se pueden resolver ejercicios como:

1. Determina las soluciones enteras de la ecuación $2x + 3y = 5$.
2. Sean a y b enteros positivos, si $a^2 + b^2$ es divisible por ab, prueba que $a = b$.

3. Halla todos los pares de enteros (x, y) tales que $1 + 1996x + 1998y = xy$.
4. Demuestra que la ecuación $3x^2 + y^2 = 2z^2$ no posee soluciones enteras no nulas.
5. Determina todas las soluciones enteras no nulas de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$.
6. Halla el menor número natural de tres cifras, tal que la suma de los cuadrados de sus cifras básicas sea divisible por 6.
7. En un paseo dominical conocí a un señor al cual le pregunté su edad y me respondió de la siguiente forma: "El último dígito de mi edad es 3 y el cuadrado del primer número es la edad al revés". ¿Qué edad tiene el señor?
8. Se tienen dos números de dos cifras cada uno, que cumplen las condiciones siguientes:

I. Si se coloca uno de ellos a la derecha del otro, se obtiene un número de cuatro cifras, que al ser dividido por la suma de los dos números iniciales el cociente es 46 y el resto 153.

II. Si se coloca el mismo número de I, pero a la izquierda del otro, se obtiene un número de cuatro cifras, que al ser dividido por la suma de los números iniciales el cociente es 54 y el resto es 2. Halla los números.

9. Observa que $8^2 - 2^2 = 82 - 22 = 60$; $6^2 - 4^2 = 62 - 42 = 20$. Halla todos los números naturales a y b que cumplan dicha condición con $a > b$.
10. Prueba que no existe un entero $n > 1$ tal que n divida a $3^n - 2^n$.
11. Para un entero positivo n, encuentra el número de soluciones de la congruencia $x^2 \equiv 1 \ (mod n)$.

Funciones aritméticas:

En esta parte se deben trabajar ejercicios donde se utilicen las propiedades y aplicaciones de las funciones aritméticas, se pueden resolver ejercicios como:

1. Demuestra que $\lfloor x + y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$
2. Demuestra que la parte fraccionaria del número $\sqrt{4n^2 + n}$ no es mayor que 0,25.
3. ¿En cuántos ceros termina la representación decimal de 1000!?
4. Demuestra que si m y n son enteros positivos, entonces $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ es un entero

5. Determina el número de soluciones reales de la ecuación $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{a}{3} \rfloor + \lfloor \frac{a}{5} \rfloor = a$

6. Prueba que para todo entero positivo n se cumple que: $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n+2} \rfloor$

7. Encuentra todos los enteros positivos n tales que es un número primo el resultado $\left\lfloor \frac{n^3+8n^2+1}{3n} \right\rfloor$

8. Sea r un número real tal que $\lfloor r + \frac{19}{100} \rfloor + \lfloor r + \frac{20}{100} \rfloor + \ldots + \lfloor r + \frac{92}{100} \rfloor = 554$ calcula $\lfloor 100r \rfloor$.

ÁLGEBRA:

Factorización de expresiones algebraicas. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas:

1. Demuestra las siguientes identidades:

a) $(b + c - 2a)^3 + (a + b - 2c)^3 + (c + a - 2b)^3 =$

$$= 3(b + c - 2a)(c + a - 2b)(a + b - 2c)$$

b) $\dfrac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \dfrac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \dfrac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)} = a+b+c$

c) $\dfrac{2a}{a+b} + \dfrac{2b}{b+c} + \dfrac{2c}{c+a} + \dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)} = 3$

Descomponer en factores las siguientes expresiones:

a) $f(a,b) = a^2 - 2a^3b - 2ab^3 + b^2$

b) $f(a,b) = a^3 - 7a^2 + 7a + 15$

2. Demuestra que si a + b + c = 0, donde a, b, c son diferentes de cero, entonces:

$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$

3. Si $x + y = xy = 3$, encuentra $x^3 + y^3$.

4. Sea x un número real tal que $x + \frac{1}{x} = 2$, calcula $x^2 + \frac{1}{x^2}$

5. Sean a, b, c números reales distintos dos a dos. Prueba que:

$\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} = \left(\frac{1}{(b-c)} + \frac{1}{(c-a)} + \frac{1}{(a-b)}\right)^2$

6. Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x+9} = 3$

7. Resuelve la ecuación $x^4 + a^2 - 3ax^3 + 3a^3x = 0$

8. Prueba que $x^2 + 4xy + 3y^2$ es un factor de $x^4 - x^3y - 11x^2y^2 + 9xy^3 + 18y^4$

Progresiones aritméticas, geométrica y armónica. Sucesiones recurrentes.

En esta parte se deben determinar el término n-ésimo de una sucesión, la suma de los primeros n términos, la sucesión de las sumas parciales, polinomios característicos, incluyendo los de las progresiones aritmética, geométrica y armónica, así como la sucesión de Fibonacci, sucesiones de los cuadrados y de los cubos de números naturales, se pueden trabajar ejercicios como:

1. Determinar los términos que se indican en las siguientes progresiones aritméticas:
   a) el término 20 en: $1, 6, 11, 16, \ldots$
   b) el 12 en: $-4, 0, 4, 8, \ldots$
2. Calcula el término general de la sucesión $-2, 0, 2, 4, 6, \ldots$
3. La suma de los términos de una progresión aritmética limitada es 169 y su término central es 13. Determina el número de términos de la progresión.
4. Demuestra que la suma de los cuadrados de dos números consecutivos de Fibonacci es un número de Fibonacci.
5. Considera la sucesión $a_1 = 20$, $a_2 = 30$, $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ para $n \geq 2$. Determinar n tal que $1 + 5a_na_{n+1}$ es un cuadrado perfecto.

Polinomios:

En esta parte se deben trabajar ejercicios donde se utilice el método de los coeficientes indeterminados, las relaciones entre las raíces y los coeficientes de las ecuaciones polinómicas y el resto de los contenidos que se estudian, se pueden resolver ejercicios como:

1. Demuestra que $(x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1$ es divisible por $x-1$ y por $x-2$.
2. Utilizar el método de los coeficientes indeterminados para determinar expresiones generales para sumas como:

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2$

b) $1{\cdot}2{\cdot}3 + 2{\cdot}3{\cdot}4 + 3{\cdot}4{\cdot}5 + \dots + n(n+1)(n+2)$

3. Determinar el cociente y el resto de la división del polinomio $2x^5 - 3x^3 + 2x + 1$ por el polinomio $x^2 + x + 1$

4. Determina m y n de modo que el polinomio $4x^4 + 4x^3 + nx + 2x + m$ sea un cuadrado.

5. Demuestra que:

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$$

6. ¿Para cuáles $a \in R$ la suma de las raíces del polinomio $x^2 - (a-2)x - a - 1$ es mínima?

7. Sea P un polinomio con coeficientes enteros que satisface que $P(5) = 2005$. ¿Es posible que el número $P(2005)$ sea un cuadrado perfecto?

8. Encuentra a tal que – 1 es una raíz múltiple de $x^5 - ax^2 - ax + 1$

9. Encuentra todos los polinomios que son solución de la ecuación funcional $f(x) \cdot f(x+1) = f(x^2 + x + 1)$

10. Encuentra el resto de la división de $x^{1959} - 1$ por $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

11. Encuentra una ecuación cúbica cuyas raíces son las terceras potencias de las raíces de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Funciones y Ecuaciones Funcionales:

En esta parte se deben realizar ejercicios donde se fije la definición y las propiedades de funciones y después resolver ecuaciones funcionales por los métodos estudiados. Se pueden trabajar ejercicios como:

1. Sea $f: R \to R: f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$.
   a) Prueba que $f(1) = 0$.
   b) Prueba que $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a), \forall a \in R*$.
   c) Prueba que $f(an) = nf(a), \forall n \in N, a \in R_+^*$.

2. Una función *f* cumple que $f(x) \neq 0,\ \forall x \in R$ y $f(x+k) = \dfrac{-3k}{f(x)},\ \forall x \in R, k \in R$. Pruebe que *f* es periódica con período 2*k*.
3. Determine cuatro ceros de la función *f* si $xf(x+2)=(x-3)f(x),\ \forall x \in R$.
4. Halle la función cuadrática *f* que cumple $f(-1)=0, f(0)=5, f(6)=-7$.
5. Sea $f : Z \to Z$ tal que:

$$f(n)=\begin{cases} n+3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Sea *k* impar tal que $f(f(f(k)))=27$. Determine *k*.

6. Sea $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}: f\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right) \geq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right),\ \forall x,y \in \mathrm{R} : x+y \neq 0$. Pruebe que *f* es monótona decreciente en R_- y monótona creciente en R_+.
7. Considere la función $f : N \to N : f(f(n)) = f(n+1) + f(n),\ \forall n \in N$. Demuestre que *f* es inyectiva.
8. Determine todas las funciones $f: R \to R: f2(x) = 4f(x) - 4,\ \forall x \in R$.
9. Determina todas las funciones $f : R \to R$ que cumplan simultáneamente las condiciones siguientes:
   i. $f(xy) = yf(x),\ \forall x, y \in R$.
   ii. $f(1) = 2$.
10. Halle todas las funciones $f:\mathrm{R}\setminus\{1\}\to\mathrm{R}: f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2,\ \ \forall x \in \mathrm{R}\setminus\{-1\}$.
11. Determine todas las funciones $f:\mathrm{R}^*\to\mathrm{R}: f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x,\ \ \forall x \in \mathrm{R}^*$. $\quad (1)$
12. Halle todas las funciones $f : N \to N$, tales que:
    i. $f(1) = 3$.
    ii. $f(m+n) = f(m) + f(n),\ \forall m, n \in N$.

Desigualdades:

En esta parte se deben utilizar como ejercicios las demostraciones de las desigualdades con nombres que aparecen, además se deben utilizar todas en la solución de ejercicios tales como:

1. Para x, y reales no negativos, prueba que $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

2. Para x, y, z reales, prueba que $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$

3. Si $a, b, c > 0$ satisfacen que $abc = 1$, prueba que: $\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3$

4. Sean a, b, c números positivos, prueba que: $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \geq \frac{1}{abc}$

5. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ enteros positivos distintos, prueba que: $\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

6. Prueba que cada tres números reales positivos a, b, c satisfacen que: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$

7. Sean a, b, c, d reales positivos con $ab + bc + cd + da = 1$, prueba que: $\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$

8. Para $0 \leq a, b, c \leq 1$, prueba que:

   $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$

9. Demuestra que para cada tres números reales no negativos x, y, z se tiene: $x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x + y-z)$

10. Sean a, b, c, d números reales positivos con $a + b + c + d = 1$, prueba que: $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$

Trigonometría:

En esta parte se puede aplicar la trigonometría a las restantes ramas de la Matemática que se trabajan en el entrenamiento, se pueden resolver ejercicios tales como:

1. Demostrar la identidad: $\frac{\cos^2 \alpha}{ctg\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4} sen 2\alpha$

2. Demuestra la identidad: $\frac{tg^2 2\alpha - tg^2\alpha}{1 - tg^2 2\alpha \cdot tg^2\alpha} = tg 3\alpha \cdot tg\alpha$

3. Demuestra que si $a > 0, b > 0, c > 0$ y $a + b + c = \frac{\pi}{2}$:

$$tgatgb + tgbtgc + tgctga = 1$$

4. Demuestra que si $sen\alpha + sen\beta = 2\,sen\,(\alpha + \beta)$, donde $\alpha + \beta \neq k\pi$ entonces: $tg\,\frac{\alpha}{2}\,tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$
5. Resolver la ecuación $senx + 7\,cosx = 5$
6. Resolver la ecuación $3\,tg\,2x - 4\,tg\,3x = tg^2\,3xtg\,2x$
7. Simplifica la expresión: $\sqrt{sen^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4sen^2 x}$
8. En un triángulo ABC, si a, b, c son los lados opuestos a los vértices A, B, C y los ángulos se denotan con las mismas letras que sus vértices, demuestra que: $sen\,\frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$
9. En el triángulo ABC, $3\,senA + 4\,cosB = 6$ y $4\,senB + 3\,cosA = 1$. Determina la amplitud del ángulo C.
10. Sea ABC un triángulo. Prueba que:
    a) $sen\frac{A}{2}\,sen\frac{B}{2}\,sen\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$
    b) $sen^2\frac{A}{2} + sen^2\frac{B}{2} + sen^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$
    c) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$
    d) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Método de inducción completa:

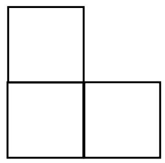
En esta parte se debe aplicar la inducción a las restantes ramas de la Matemática que se trabajan en el entrenamiento, se pueden resolver ejercicios tales como:

1. Demuestra que para todo n natural $(n > 1)$, se cumple que: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
2. Prueba que el número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$
3. Demuestra que para cualquier número natural n se cumple que: $3^{n+1} / 2^{3^n} + 1$
4. Encuentra todos los números naturales n tales que:

a) $2^n > 2n + 1$

b) $2^n > n^2$

5. Prueba que si quitamos una esquina de un tablero de $2^n X 2^n$ podemos cubrir el resto del tablero con piezas como la de abajo:



6. Prueba que un triángulo equilátero puede ser dividido en n triángulos equiláteros para $n \geq 6$.

7. Demuestra que para n natural se cumple que:

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$

GEOMETRÍA:

Conceptos básicos de la Geometría Plana:

En esta parte se sugiere que se propongan ejercicios como:

1. Un trapecio ABCD, con AB ǁ CD, y AD < CD, está inscrito en una circunferencia Γ. Sea DP una cuerda paralela a AC. La recta tangente a Γ que pasa por D intersecta a la recta AB en E y las rectas PB y DC se cortan en Q. Demuestra que EQ = AC.

2. Sea *ABD* un triángulo acutángulo, con la propiedad de que la bisectriz del ángulo *BAC*, la altura de *B* y la mediatriz de *AB* se cortan en un punto. Determine la amplitud del ángulo *BAC*.

3. Sea el triángulo ABC y P un punto en su interior tal que $\angle PBC = \angle PCA < \angle PAB$. La recta PB corta al circuncírculo del triángulo ABC en B y E, la recta CE corta el circuncírculo de APE en E y F. Demuestra que la razón entre el área del cuadrilátero APEF y el área del triángulo ABP, no depende de la ubicación del punto P.

4. Sea G el baricentro de un triángulo ABC, una recta d que pasa por G corta los lados BC, CA, AB en los puntos A_1, B_1, C_1, respectivamente. Sea L un punto interior al triángulo que también está en d. Demuestra que: $\frac{LA_1}{A_1G}+\frac{LB_1}{B_1G}+\frac{LC_1}{C_1G}=3.$

5. Un trapecio es dividido en 4 triángulos por sus dos diagonales. Si X, Y son las áreas de los dos triángulos adyacentes a los lados paralelos del trapecio, determina en función de X, Y el área del trapecio.

6. Demuestra que en todo pentágono convexo existen dos ángulos interiores consecutivos cuya suma es mayor o igual que 216 grados.

7. Demuestra que si S es el área del triángulo ABC, este triángulo es equilátero si y solo sí $a.h_a + b.h_b + c.h_c = 6S$.

8. Halla el área de un triángulo isósceles cuya base mide 12 cm y la altura relativa a ésta es igual al segmento que une los puntos medios de la base y de uno de los lados.

9. Sea ABCDE un pentágono convexo. Se traza por D una paralela a EC que corta a la prolongación de AE en F.

   a) Demuestra que $[ABCF] = [ABCDE]$.
   b) Determina un triángulo ABG tal que $[ABG] = [ABCDE]$.

10. Demuestra que si un polígono convexo tiene la propiedad de que no es posible colocar un triángulo de área 1 en su interior, entonces el mismo puede colocarse en el interior de un triángulo de área 4.

Movimientos en el plano:

En esta parte se pueden proponer problemas como:

1. Dos circunferencias S_1 y S_2 y una recta l son dados. Construya una recta paralela a l, tal que la distancia entre los puntos de intersección de esta recta con las circunferencias S_1 y S_2 sea igual a un valor dado a.

2. En el triángulo ABC las bisectrices de los ángulos B y C cortan a la mediana AD en los puntos E y F, respectivamente. Si $\mathrm{BE} = \mathrm{CF}$, prueba que ABC es isósceles.

3. Sean O_1, O_2, …, O_n, (n par) puntos de un plano y sea AB un segmento arbitrario; sea A_1B_1 el segmento obtenido de AB por una simetría sobre O_1; A_2B_2 es obtenido a partir de A_1B_1 por una simetría sobre O_2, y así sucesivamente; sea A_nB_n el segmento obtenido de $A_{n-1}B_{n-1}$ por una

simetría sobre O_n. Prueba que $AA_n = BB_n$. ¿La afirmación de ese problema continua verdadero si n fuera impar?

4. Son dados una recta MN y dos puntos A y B al mismo lado de la recta. Halla un punto X sobre MN tal que los segmentos AX y BX formen ángulos iguales con MN, o sea $\angle AXM = \angle BXN$.
5. Considera un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia Γ, y sea P un punto sobre el menor arco BC de Γ. Prueba que PA = PB + PC.
   a) En un triángulo arbitrario ABC dado, determine un punto P en su interior tal que PA + PB + PC sea mínimo. (Problema de Fermat)

<u>Homotecia:</u>

En esta parte se pueden proponer problemas como:

1. Prueba que las medianas de un triángulo son concurrentes.
2. Sea t la recta tangente en el punto T a la circunferencia inscrita en el triángulo ABC y paralela al lado BC ($t \neq BC$). Sea J_A el punto de tangencia del excírculo del triángulo ABC relativo al lado BC con el lado BC. Prueba que A, T y J_A son colineales.
3. Prueba que el circuncentro O, el baricentro M y el ortocentro H de un triángulo ABC son colineales. Pruebe que HM = 2MO y encuentre el centro de la circunferencia de Euler)
4. Dos circunferencias son tangentes interiores en el punto A. Una secante intercepta las circunferencias en M, N, P y Q (en ese orden). Prueba que $\angle MAP = \angle NAQ$.
5. Una cuerda MN es trazada en una circunferencia Γ. En uno de los segmentos circulares se inscriben las circunferencias Γ_1 y Γ_2 tocando al arco en A y C y a la cuerda en B y D. Demuestra que el punto de intersección de AB y CD es independiente de AB y CD y de la elección de Γ_1 y Γ_2.
6. Sean I y O el incentro y el circuncentro del triángulo ABC. Sean A´, B´, C´, los puntos de tangencia de la circunferencia con centro en I con los lados BC, CA y AB. Sea H el ortocentro del triángulo A´B´C´. Prueba que I, O, H soncolineales.
7. Sea F el punto medio de la altura CH relativa al lado AB de punto medio E del triángulo ABC. Q y P son puntos sobre los lados AC y BC tales que $QP \parallel AB$. R es la proyección de Q sobre AB. S es la intersección de EF y PR. Prueba que S es el punto medio de PR.

Igualdad de triángulos:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. Demuestra que las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.
2. Sea ABCD un rectángulo, E y F puntos en los segmentos BC y DC respectivamente, tal que $\angle DAF = \angle FAE$. Demuestra que si $DF + BE = AE$, entonces ABCD es un cuadrado.
3. Sea ABC un triángulo con $AC > BC$. En el circuncírculo del triángulo ABC, sea D el punto medio del arco ACB. Sea E el punto en AC tal que $\mathrm{DE} \perp \mathrm{AC}$. Prueba que $AE = EC + CB$.
4. Sean P y Q puntos en el lado AB del triángulo ABC (P entre A y Q), tales que $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB$. Sean M y N los puntos de intersección de las rectas CP y CQ con la bisectriz AD del $\angle$BAC, respectivamente. Si $NP = CD$ y $3\angle A = 2\angle C$, prueba que los triángulos CQD y QNB tienen áreas iguales.
5. En el triángulo ABC, M es un punto situado en el interior del segmento AC y N es un punto sobre la prolongación del segmento AC de forma tal que $MN = AC$. Sean D y E los pies de las perpendiculares trazadas desde M y N a BC y AB respectivamente. Probar que el ortocentro del ΔABC está situado sobre la circunferencia circunscrita al ΔBED.
6. Sea ABCD un rectángulo de centro O. Asumamos que AB $\neq$ BC. La recta perpendicular por O a BD corta a las rectas AB y BC en los puntos E y F respectivamente. Sean M y N los puntos medios de los segmentos CD y AD respectivamente. Prueba que $\mathrm{FM} \perp \mathrm{EN}$.
7. Considera el cuadrado ABCD y el punto E en el lado AB. La diagonal AC corta al segmento DE en el punto P. La perpendicular desde el punto P a DE intersecta al lado BC en el punto F. Prueba que $EF = AE + FC$.
8. Puntos B_1, C_1 son marcados en la bisectriz del ángulo A del triángulo ABC tal que $\mathrm{BB_1} \perp \mathrm{AB}$ y$\mathrm{AC_1} \perp \mathrm{AC}$. Sea M el punto medio de B_1C_1. Prueba que $MB = MC$.
9. ABCD es un cuadrado. Con centro en A se traza la circunferencia que pasa por B. Desde un punto E del lado BC distinto de B y de C, se traza la tangente a la circunferencia, dicha tangente corta al lado CD en F. Halla la amplitud del ángulo EAF.

10. En el interior de un triángulo ABC se ha tomado un punto P y en los lados AC y BC se han tomado respectivamente los puntos M y L tal que $\angle PAC = \angle PBC, \angle PLC = \angle PMC = 90^o$. Demuestra que si D es el punto medio de AB, entonces $DM = DL$.

Semejanza de triángulos:

En esta parte se pueden resolver ejercicios como:

1. En la figura se tiene que A, B, C son puntos de la circunferecia de centro O, BD es tangente a la circunferencia en B y AB es la bisectriz del ángulo CAD. Demuestra que $\triangle$ABC ~$\triangle$ABD.

   a) Demuestra que $r = \dfrac{\sqrt{AD \cdot AC}}{2}$

2. Sea I el incentro del triángulo ABC. Los segmentos PT, QU, RS pasan a través de I, con P, U en AC, S, Q en AB, R, T con BC y son paralelos a los lados AB, BC, CA, respectivamente. Determina el valor de la suma $\dfrac{PT}{AB} + \dfrac{QT}{BC} + \dfrac{RS}{CA}$

3. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo ABCD se cortan en O. Sea m la amplitud del ángulo agudo formado por las diagonales. Un ángulo variable XOY de medida m, intercepta al cuadrilátero en un cuadrilátero convexo de área constante. Prueba que ABCD es un cuadrado.

4. Sean ABC un triángulo D, E, F puntos sobre los lados BC, CA y AB respectivamente. Sean D', E', F', las reflexiones de D en el punto medio de BC, de E en el punto medio de CA y de F en el punto medio de AB, respectivamente. Demuestra que los triángulos DEF y ABC son semejantes si y solo si los triángulos DEF y D'E'F' son congruentes.

5. Sobre un segmento AB, se toma un punto C y se construyen en uno de los semiplanos determinados por AB, tres semicircunferencias de diámetros AB, AC y CB, respectivamente. Sea P el punto de la semicircunferencia de diámetro AB cuya proyección sobre éste es el punto C. Si E y D son los puntos de intersección respectivos de PA y PB con las semicircunferencias de diámetros AC y CB. Prueba que ED es tangente común a estas dos semicircunferencias.

6. En un triángulo obtusángulo ABC, M es el punto medio del lado mayor AB, D es el pie de la perpendicular trazada desde M a BC y E es punto de AB cuya proyección sobre BC es C. Si $[ABC] = 24$, calcula $[BDE]$. $[ABC]$: denota el área del triángulo ABC.

7. Las trisectrices del ángulo A cortan a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos D y E de modo que D está entre E y B, AE corta a BC y a CD en N y P respectivamente. AD y BC se cortan en M. Prueba que: $\frac{BM}{BN}+\frac{CP}{CD}=1$.

8. Las alturas de un triángulo ABC se cortan en O. A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente. La circunferencia de centro O corta a la recta B_1C_1 en D_1 y D_2, a la recta C_1A_1 en E_1 y E_2 y a la recta A_1B_1 en F_1 y F_2. Demuestra que $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$.

9. En un cuadrilátero inscriptible ACBD cuyas diagonales se cortan en I y tal que la diagonal AB es un diámetro de la circunferencia circunscrita, se trazan CM y DN perpendiculares a AB, siendo M y N puntos de los lados AD y BC respectivamente. Demuestra que los puntos M, I y N son colineales.

10. Cada diagonal de un pentágono es paralela a uno de sus lados. Prueba que la razón entre las longitudes de una diagonal y su lado correspondiente en la misma para cada uno de los cinco pares. Determine el valor de esa razón.

Concurrencia y colinealidad:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. ABC es un triángulo en el cual AC = 13 y AB = 14. AB es prolongada más allá de B a D tal que BD = 6. E es seleccionada en BC, y DE es prolongada hasta F en el lado AC del triángulo ABC tal que AF = 4. calcula el valor numérico de $\frac{CE}{BE}$.

2. En el triángulo ABC se tiene que AB = 15, AC = 37, y BC = 44. Los puntos E y F son seleccionados en AC y AB respectivamente tal que AE = 7 y AF = 5. Sea P la intersección de BE y CF, AP es prolongado hasta D en el lado BC del triángulo ABC. Las bisectrices de los ángulos BDA y DBA se interceptan en P_2. Calcula la distancia desde P_2 hasta AB.

Cuadriláteros cíclicos:

En esta parte se deben demostrar todos los teoremas como ejercicios, se pueden resolver ejercicios como:

1. Sea ABC un triángulo acutángulo, AD, BE, CZ sus alturas y H el ortocentro. Sean AI, AT las bisectrices interior y exterior del ángulo A. Sean M y N los puntos medios de BC y AH respectivamente. Prueba que:

a) $\mathrm{MN} \perp \mathrm{EZ}$

b) Si MN corta a los segmentos AI y AT en los puntos K, L, entonces $\mathrm{KL} = \mathrm{AH}$.

2. Los puntos D y E están en los lados AB y AC del triángulo ABC tal que $DE \parallel BC$. Sea P un punto arbitrario en el interior del triángulo ABC. Las rectas PB y PC interceptan a DE en F y G respectivamente. Si O_1 es el circuncentro de PDG y O_2 es el circuncentro de PFE, demuestra que $AP \perp O_1O_2$.

3. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico y sea M el conjunto de incentros y excentros de los triángulos BCD, CDA, DAB, ABC (para un total de 16 puntos). Demuestra que existen dos conjuntos de rectas paralelas K y L, cada uno formado por 4 rectas, tal que cada recta de $K \cup L$ contiene exactamente 4 puntos de M.

4. En el triángulo isósceles ABC (AC = BC) el punto O es el circuncentro, I el incentro, y D está en BC tal que $OD \perp BI$. Prueba que $ID \parallel AC$.

5. En el triángulo isósceles ABC (AB = BC) trazamos la bisectriz CD. La perpendicular a CD por el centro del circuncírculo de ABC intercepta BC en E. La paralela a CD por E corta a AB en F. Demuestra que BE = FD.

6. Sea ABC un triángulo y a, b, c las longitudes en la notación usual. Puntos D, E están en el mismo semiplano que A con respecto a BC. Sea DB = c, CE = b y el área de DECB es máxima. Sea F el punto medio de DE y sea FB = x. prueba que FC = x y $4x^3 = (a^2 + b^2 + c^2)x + abc$.

7. Sea AM y BN las alturas de un triángulo acutángulo ABC ($\angle ACB \neq 45^\circ$). Los puntos K y T son tomados en los rayos MA y NB tal que MK = MB y NT = NA. Prueba que $KT \parallel MN$.

8. La altura CH del triángulo rectángulo ABC ($\angle C = 90^\circ$) interseca las bisectrices AM y BN en los puntos P y Q respectivamente. Prueba que la recta que pasa por los puntos medios de QN y PM es paralela a la hipotenusa.

9. Sea ABC un triángulo isósceles con AC = BC. Sean PQR puntos en AB, BC y AC respectivamente tal que $\mathrm{PQ} \parallel \mathrm{AC}$ y $\mathrm{PR} \parallel \mathrm{BC}$. Sea O el circuncentro de ABC. Prueba que el cuadrilátero CROQ es cíclico.

10. Sea A' el pie de la altura al lado BC del triángulo acutángulo ABC. La circunferencia con diámetro AA' interseca el lado AB en los puntos A y D, y al lado AC en los puntos A y E. Prueba que el circuncentro del triángulo ABC está en la recta determinada por la altura al lado DE del triángulo ADE.

Trigonometría:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. Sea ABC un triángulo isosceles con AB = AC. Suponga que la bisectriz del ángulo B corta a AC en D y que $BC = BD + AD$. Determina $\angle$ A.
2. Son dados un triángulo ABC y los puntos K, L, M en los lados AB, BC y CA respectivamente, son dados tal que $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$. Demuestra que si las circunferencias circunscritas de los triángulos AKM, BLK, CML son congruentes, entonces lo son las circunferencias inscritas de esos triángulos.
3. Sea ABC un triángulo y construimos cuadrados ABED, BCGF, ACHI externamente en los lados de ABC. Demuestra que los puntos D, E, F, G, H, I están en una misma circunferencia si y sólo si ABC es equilátero o isósceles rectángulo.
4. En el triángulo ABC, tenemos $\angle$A = 60º. Sean O, H, I, I' son el circuncentro, el ortocentro, incentro y excentro opuesto a A, respectivamente, de ABC. Sean B' y C' los puntos en los segmentos AC y AB, tal que AB = AB' y AC = AC'. Prueba que:
    a) Los puntos B, C, H, O, I, I', B', C' están en una misma circunferencia.
    b) Si OH corta a AB y AC en E y F respectivamente el perímetro del triángulo AEF es igual a $AB + AC$.
    c) $\mathrm{OH} = |\mathrm{AB} - \mathrm{AC}|$.
5. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea MN la paralela media del triángulo ABC paralela a BC y P la proyección del punto N en el lado BC. Sea A_1 el punto medio del segmento MP. Los puntos B_1 y C_1 son construidos de forma similar. Demuestra que si AA_1, BB_1 y CC_1 concurren entonces el triángulo ABC es isósceles.

6. Sea P un punto interior del triángulo ABC. La circunferencia inscrita en ABC toca a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F respectivamente. L, M y N son los puntos de intersección de las rectas AP, BP y CP con los lados EF, FD y DE del triángulo DEF. Muestra que las rectas DL, EM y FN concurren.
7. Dado un rombo ABCD con $\angle$B = 60º. El punto M es tomado en el interior del triángulo ADC tal que $\angle$AMC = 120º. Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas BA, CM y BC, AM, respectivamente. Prueba que D está en la recta PQ.
8. Puntos M, L, K son tomados en el lado BC del triángulo ABC (el orden de los puntos es B, M, L, K, C) tal que BM = ML = LK = KC. Se conoce que $\angle$ACB = $\angle$MAB. Prueba que: $\angle$KAL > 1,5·$\angle$CAK y que el coeficiente 1,5 es el mayor posible.
9. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O. Sea P en BC el pie de la altura por A. Suponga que $\angle \mathrm{BCA} \geq \angle \mathrm{ABC} + 30$º. Prueba que $\angle \mathrm{CAB} + \angle \mathrm{COP} < 90$º.
10. En un triángulo ABC sea AP bisectriz del $\angle$BAC y sea BQ bisectriz del $\angle$ABC con P en BC y Q en AC. Se conoce que el $\angle$BAC = 60º y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles ángulos del triángulo ABC?

<u>Vectores:</u>

En esta se pueden resolver problemas como:

1. Demuestra que el segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases.
2. Demuestra que las medianas de un triángulo se cortan en un punto M, que divide a las medianas en la razón 2 : 1 contando desde el vértice.
3. En el lado AD y en la diagonal AC de un paralelogramo ABCD se toman los puntos M y N tales que $AM = \frac{1}{5}AD$ y $AN = \frac{1}{6}AC$. Demuestra que M, N, B están alineados.
4. Demostrar la paralela media de un triángulo.
5. En el triángulo ABC, se toman D, E, F en los lados, tal que $BC = 3\,BD$, $CA = 3\,CE$ y $AB = 3\,AF$. Prueba que los triángulos ABC y DEF tienen el mismo centroide.
6. Prueba que con las medianas de un triángulo se puede construir otro triángulo con sus lados paralelos a dichas medianas.

7. En el triángulo isósceles ABC de base BC, D punto medio de BC, DE $\perp$ AC, F punto medio de DE. Prueba que BE $\perp$ AF.
8. Sea ABCD un paralelogramo con $\frac{AC}{BD} = \lambda$. Las bisectrices de los ángulos formados por las diagonales cortan los lados del paralelogramo en los puntos K, L, M, N. Prueba que la razón entre las áreas de ambos paralelogramos sólo depende de λ.
9. Sean H y O ortocentro y circuncentro del triángulo ABC y sea H´ el simétrico de H con respecto a O. Prueba que la suma de los cuadrados de los lados de los triángulos H´AB, H´BC y H´AC es la misma.
10. R, G, H, F son respectivamente el circunradio, el centroide, el ortocentro y el punto medio de GH en el triángulo ABC. Prueba que $\mathrm{AF}^2 + \mathrm{BF}^2 + \mathrm{CF}^2 = 3\mathrm{R}^2$.

Inversión:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. Demostrar el teorema de Ptolemeo: para puntos coplanares A, B, C, D, si ellos son concíclicos, entonces, $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

2. Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que las diagonales CA y BD se cortan perpendicularmente, y sea O su punto de intersección. Demuestre que las reflexiones de O a través de AB, AC, CD, DA son concíclicos.

3. Sea P un punto dentro del triángulo ABC tal que $\angle APB . \angle ACB = \angle APC . \angle ABC$. Sean D, E los incentros de los triángulos APB, APC, respectivamente. Prueba que AP, BD, CE, se cortan en un punto.

4. Sea PQ el diámetro del semicírculo H. La circunferencia O es internamente tangente a H y tangente a PQ en C. Sea A un punto en H y B un punto en PQ tal que AB $\perp$ PQ y es tangente a O. Demuestre que AC biseca $\angle$PAB.

5. Dado un semicírculo con diámetro AB y centro O y una recta que corta al semicírculo en C y D; y a la recta AB en M (MB <MA, MD < MC). Sea K el segundo punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos AOC y DOB. Demuestra que $\angle MKO = 90°$.

6. Sean M, N y P los puntos de intersección del incírculo del triángulo ABC con los lados AB, BC y CA respectivamente. Demuestra que el ortocentro del triángulo MNP, el incentro del triángulo ABC y el circuncentro del triángulo ABC, son colineales.
7. Prueba que dos circunferencias cualesquiera se pueden transformar por una inversión en dos circunferencias concéntricas.
8. Prueba que dos circunferencias cualesquiera, que no se corten pueden transformarse por inversión en dos circunferencias concéntricas.
9. Demostrar el teorema de Ptolomeo generalizado: sean A, B, C, D puntos en el plano, no todos colineales. Demuestra que: $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$, con la igualdad si y sólo si ABCD es cíclico.
10. Considera el triángulo ABC, su circunferencia circunscrita Γ y su circuncentro O. Sean AA´ , BB´ , CC´ diámetros y A´´, B´´, C´´, los simétricos de los puntos A, B, C respectivamente, con relación a las mediatrices de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Prueba que los circuncírculos de los triángulos OA´A´´, OB´B´´ y OC´C´´ tienen otro punto común distinto de O.

MATEMÁTICA DISCRETA:

<u>Razonamiento Lógico:</u>

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. Un gran grupo de niños están “jugando a la suma”. El juego consiste en sumar el número de su posición al número que dijo el niño anterior. El primero dice 1, a partir de él, el segundo dice 3, el tercero 6 y así sucesivamente. ¿Podría alguno decir 595? ¿Y $2^{2004}+1$?
2. A las 6 a.m. de un día determinado, una persona comienza a subir una montaña de gran pendiente, la subida es lenta y la velocidad es irregular. Al día siguiente a las 6 a.m. inicia el descenso siguiendo exactamente el mismo camino del día anterior, pero ahora la bajada es rápida y la velocidad sigue siendo irregular. La persona se pregunta ¿Existirá algún punto de este camino tal que hoy al bajar, pase a la misma hora en que pasé ayer al subir?
3. En una hoja de papel blanca se aplica pintura negra. Pruebe que como quiera que se haga, siempre es posible encontrar en ella tres puntos alineados, del mismo color y tal que uno de ellos sea el punto medio del segmento que determinan los otros dos.

Paridad:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. En un cuartel existen 100 soldados, todas las noches tres de ellos son escogidos para trabajar de centinelas. ¿Es posible que después de cierto tiempo uno de los soldados haya trabajado con cada uno de los otros exactamente una vez?
2. Demuestra que si a, b, c son enteros impares, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces racionales.
3. Un tablero de $6X6$ está cubierto con dominoes $2X1$. Demuestra que existe una recta que separa las piezas del tablero sin cortar ningún dominó.
4. Los números naturales de 1 a 1998 son escritos en un inmenso cuadro negro. Un alumno quita dos cualesquieras de ellos colocando en su lugar la diferencia (no negativa). Después de muchas operaciones, un único número quedará escrito en el cuadro. ¿Es posible que ese número sea cero?
5. En una isla plana existen 11 ciudades numeradas de 1 a 11. Carreteras rectas unen 1 a 2, 2 a 3, …, 10 a 11 y 11 a 1. ¿Es posible que una recta corte todas las carreteras?

Teoría Combinatoria:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. 2n jugadores participan en un torneo de tenis. Determina el número P_n de aparejamientos para la primera ronda.
2. Demuestra que el número de diagonales de un n-ágono convexo es igual al número de pares de puntos menos el número de lados.
   a) El número S_n de puntos de intersección de las diagonales es igual al número de cuádruplas de vértices.
   b) Trazamos todas las diagonales del n-ágono convexo. Suponga que no hay tres diagonales que pasen a través de un punto. ¿En cuántas partes T_n es dividido el n-ágono?
3. Carrera de caballos. ¿De cuántos modos pueden ubicarse al final de la carrera n caballos?

Principio de Dirichlet:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. Hay n personas en una habitación. Prueba que entre ellas hay dos personas que tienen el mismo número de conocidos en la habitación.
2. Un ajedrecista tiene 77 días de preparación para un torneo. El quiere efectuar al menos un juego por día, pero no más que 132 juegos. Prueba que existe una sucesión de días consecutivos en los cuales el jugó exactamente 21 juegos.
3. Sean a_1, a_2, …, a_n n enteros no necesariamente distintos. Demuestra que existe un subconjunto de esos números con suma divisible por n.
4. Demuestra que uno de (n+1) números del conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ es divisible por otro.
5. Sean a, b naturales coprimos. Demuestra que $ax - by = 1$ para algunos x, y naturales.
6. Los enteros positivos del 1 al 101 son escritos en orden. Prueba que se pueden quitar 90 de esos números, tal que los números que quedan forman una sucesión monótona creciente o decreciente.
7. Cinco puntos látices son seleccionados en el plano látice. Prueba que se pueden seleccionar dos de esos puntos tal que el segmento que une esos puntos pasa a través de otro punto látice. (El plano látice es el formado por todos los puntos del plano con las dos coordenadas enteras)
8. En la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, \dots$ cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Pero la adición es tomada módulo 10. Prueba que la sucesión es periódica pura. ¿Cuál es la longitud máxima posible del período?
9. Considera la sucesión de Fibonacci definida por: $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_{n-1} + a_n, n > 1.$ Prueba que para todo n existe un número de Fibonacci que termina en n ceros.
10. Demuestra que entre seis personas existen siempre tres que se conocen mutuamente o tres que se desconocen mutuamente.

<u>Principio del Elemento Extremo:</u>

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. ¿En cuántas partes a lo sumo es un plano cortado por n rectas?¿En cuántas partes es el espacio dividido por n planos en posición general?

2. Hay n puntos dados en un plano, cada tres de los puntos forman un triángulo de área menor o igual que 1. Demuestra que todos los puntos están en el interior de un triángulo de área menor o igual que 4.
3. Sea A un conjunto de puntos en el plano. Cada punto en A es un punto medio de dos puntos en A. Demuestra que A es un conjunto infinito.
4. Demuestra que en cada pentágono convexo podemos seleccionar tres diagonales con las que se puede construir un triángulo.
5. Demuestra que en cada tetraedro existen tres ejes que se cortan en el mismo vértice, con los cuales se puede construir un triángulo.
6. Cada punto rático del plano es marcado con un entero positivo. Cada uno de esos números es la media aritmética de sus cuatro vecinos (arriba, abajo, izquierda, derecha). Demuestra que todas las marcas son iguales.
7. Demuestra que no existen cuádruplas de enteros positivos (x, y, z, u) que satisfacen: $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$

<u>Principio de Invarianza:</u>

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. Sea n un entero positivo impar. Primero hay escritos los números $1, 2, \dots, 2n$ en una pizarra. Se seleccionan dos números arbitrarios a, b se borran y en su lugar se escribe el número $|a - b|$. Prueba que al final quedará un número impar en la pizarra.
2. Una circunferencia es dividida en 6 sectores. Los números $1, 0, 1, 0, 0, 0$ son escritos en los sectores (en sentido contrario al de las manecillas del reloj). Está permitido sumarle 1 a cada uno de los números de cualquier pareja de vecinos. ¿Es posible que todos los números escritos sean iguales después de un número finito de tales pasos?
3. En el parlamento de Sikinia cada miembro tiene cuando más tres enemigos. Prueba que la casa donde funciona el mismo, puede separarse en dos casas, tal que cada miembro tiene cuando más un enemigo en su casa.

4. Suponga que no todos los 4 enteros a, b, c, d son iguales. Empezando con (a, b, c, d) y repetidamente reemplazando (a, b, c, d) por $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. ¿Será posible que al menos un número de la cuádrupla sea eventualmente arbitrariamente grande?
5. Cada uno de los números $a_1, \dots, a_n$ es 1 o – 1, y tenemos que $S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0$. Prueba que 4 divide a n.
6. 2n embajadores son invitados a un banquete. Cada embajador tiene cuando más n – 1 enemigos. Prueba que los embajadores pueden ser sentados alrededor de una mesa redonda, tal que ninguno está sentado después de un enemigo.

Coloraciones, tableros y juegos:

En esta parte se pueden resolver problemas como:

1. Un piso rectangular es cubierto por losas de $2X2$ y $1X4$. Una losa se hace pedazos. Existe una losa del otro tipo disponible. Demuestra que el piso no puede ser cubierto reordenando las losas.
2. Prueba que un rectángulo de aXb puede ser cubierto por rectángulos de $1\mathrm{Xn}$ si y solo si n divide a a o n divide a b.
3. Cada punto del plano es coloreado de rojo o azul. Demuestra que existe un rectángulo con vértices del mismo color.
4. Cada punto del espacio es coloreado de rojo o de azul. Demuestra que entre los cuadrados con lado 1 en el espacio existe al menos uno con tres vértices rojos o al menos uno con cuatro vértices azules.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA:

TEORÍA DE NÚMEROS:

Distintos tipos de números:

Básica:

Ochoa Rojas, R. (2009). Funciones y temas afines. Parte 1. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 65 – 124.

Frid, H. (2001). Os números irracionais. En revista Eureka 10. (En soporte electrónico). Páginas 37 – 46.

González, M. O. y Mancill, J. D. (1967). Álgebra Elemental Moderna I. La Habana: Pedagógica. Páginas 7 – 79.

Birkhoff, G. y MACLane, S. (1948). A Survey of Modern Algebra. New York: The Macmillan Company. Páginas 1 – 76.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 253 – 255.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.(En soporte electrónico). Páginas 264 – 281.

Complementaria:

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 378 – 380.

Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico). Páginas 37 – 42.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 84 – 87, 351 – 399.

Tsipkin, A. G. (1985). Manual de Matemática para la enseñanza media. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 45 – 113.

Taylor, H. E. y Wade,T. L. (1966). Matemáticas básicas con vectores y matrices. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 31 – 122.

Papy, F. (1972). Matemática Moderna. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 254 – 341.

Silva, C. y Cánepa, J. H. (1956). Curso de iniciación matemática. Montevideo: Medina, Páginas 1 – 18, 46 – 86, 103 – 117, 251 – 321.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 16 – 20.

Amat Abreu, M. (2004). Problemas de razonamiento lógico. (En soporte electrónico). Páginas 12 – 13.

Divisibilidad:

Básica:

Pérez Seguí, M. L. (2003). Teoría de Números. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico). Páginas 23 – 63.

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 341 – 358.

Moreira, C. G. (1999). Divisibilidade, congruencia e aritmética módulo n. En revista Eureka 2. (En soporte electrónico). Páginas 41 – 43.

Larson, L. C. Problem (1983). Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 84 – 113.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 18, 46 – 51.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 13 – 31, 39 – 60.

Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico).Páginas 17 – 36.

Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico).Páginas 55 – 72.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 255 – 265, 270 – 293, 330 – 331.

Sierpinski, W. (1964). Elementary theory of numbers.Warszawa.(En soporte electrónico). Páginas 1 – 27, 33 – 34, 110 – 185.

Vorobiov, N. N. (1984). Lecciones Populares de Matemática: Criterios de Divisibilidad. Moscú: MIR. (En soporte electrónico).

Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 15 – 32.

Tattersall, J. (1999). Elementary number theory in nine chapters.New York: Cambridge UniversityPress. (En soporte electrónico). Páginas 49 – 69, 79 - 123.

Complementaria:

Vinográdov, I. (1977). Fundamentos de la Teoría de Números. Moscú: MIR. Páginas 13 – 32.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 19 – 20.

Silva, C. y Cánepa, J. H. (1956). Curso de iniciación matemática. Montevideo: Medina. Páginas 118 – 169.

Aigner, M. y Ziegler, G. (s.a).Proofs from the Book.(En soporte electrónico). Páginas 3 – 6, 17 – 22.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 70 – 82, 97 – 102.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 1 – 2.

Graham, R; Knuth, D. y Patashnik, O. (1989). Concrete Mathematics. (En soporte electrónico). Páginas 102 – 122.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 70 – 78.

Vicario García, V. (2008). Las demostraciones alternativas como recurso científico y didáctico. El caso de la infinitud de los números primos. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 33. (En soporte electrónico).

Congruencia aritmética módulo n:

Básica:

Pérez Seguí, M. L. (2003). Teoría de Números. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. Páginas 64 – 94.

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 416 – 426.

Moreira, C. G. (1999). Divisibilidade, congruencia e aritmética módulo n. En revista Eureka 2. (En soporte electrónico). Páginas 43 – 52.

Sosa Polma, H. (2001). Equacoes de Recorrencia. En revistaEureka 9. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 40.

Muniz Neto, A. (2002). Como Fermat e Bézout podem salvar o dia. En revista Eureka 12. (En soporte electrónico). Páginas 25 – 30.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 19 – 32.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 61 – 102, 129 – 130, 136 – 141, 147 - 166.

Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico).Páginas 42 – 52.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 265 – 270, 302 – 311.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 31 – 32, 63 – 67, 186 – 227, 315 – 333.

Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 74.

Complementaria:

Vinográdov, I. (1977). Fundamentos de la Teoría de Números. Moscú: MIR. Páginas 52 – 134.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 20 – 21.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition. Boston: McGraw-Hill. Páginas 169 – 196.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 311 – 314.

Tattersall, J. (1999). Elementary number theory in nine chapters.New York: Cambridge University Press. (En soporte electrónico). Páginas 150 – 209.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 25.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 5 – 6.

Graham, R; Knuth, D. y Patashnik, O. (1989). Concrete Mathematics. (En soporte electrónico). Páginas 123 – 152.

Coret, M., García, D. y Alavez, E. (s.a). Algebra Moderna. Primera parte. (En soporte electrónico). Páginas 179 – 191.

Bellot, F. (2009). El pequeño teorema de Fermat y aplicaciones. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 37. (En soporte electrónico).

Ecuaciones en enteros:

Básica:

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 339 – 348 y 363 – 373.

Muniz Neto, A. (2000). Equacones Diofantinas. En revista Eureka 7. (En soporte electrónico). Páginas 39 – 48.

Baldor, A. (s.a). Álgebra Elemental. (En soporte electrónico). Páginas 122 – 127, 311 – 318.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 38 – 39.

Andreescu, T. And D. Andrica. (2002). An introduction to Diophantine Equations. Zalau, Romania: Gil Publishing House.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico). Páginas 32 – 37, 245 – 260, 334 - 348.

Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico).Páginas 53 – 58.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 315 – 323.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 27 – 31, 35 – 63, 67 – 84, 88 – 109.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 83 – 85, 94 – 98.

Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 120 – 167.

Complementaria:

Vinográdov, I. (1977). Fundamentos de la Teoría de Números. Moscú: MIR. Páginas 33 – 51.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 21 – 22.

Barbeau, E. J. (2000). Pel´s Equation. New York: Springer.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 323 – 330.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 83 – 85.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 3 – 4.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 81 – 83.

Andreescu, T. y Andrica, D. (2002). An Introduction to Diophantine Equations. (En soporte electrónico).

Funciones aritméticas:

Básica:

Ochoa Rojas, R. (2009). Funciones y temas afines. Parte 2. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 236 – 241.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 382 – 395.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 37.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 103 – 127, 131 – 136, 141 – 146.

Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico).Páginas 7 – 16.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 293 – 302.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 130 – 131, 228 – 263.

Complementaria:

Moreira, C. G. y Corcao Saldanha, N. (2001). Funcoes Multiplicativas e Funcao do Möbius. En revista Eureka 8. (En soporte electrónico). Páginas 43 – 46.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 52 – 69.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 86 – 89.

Graham, R; Knuth, D. y Patashnik, O. (1989). Concrete Mathematics. (En soporte electrónico). Páginas 67 – 101.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 78 – 81.

Sistematización:

Pérez Seguí, M. L. (2003). Teoría de Números. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. Páginas 95 – 100.

Davidson, L., Reguera, R. y Frontela, R. (s.a). Problemas de Matemática Elemental 1. (En soporte electrónico).

Davidson, L., Reguera, R. y Frontela, R. (s.a). Problemas de Matemática Elemental 2. (En soporte electrónico).

Fauring, P., Gutiérrez, F., de Araujo, C.G., Wagner, E., y Wykowski, A. (1996). 10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemática. Madrid: FOTOJAE, SA. Problemas 3.2, 3.6, 4.6, 5.1, 6.4, 6.5, 8.1, 9.1, 9.6, 10.1, N1 – N11, D3.

Andrescu, T. and Z. Feng.(1997). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1996 – 1997. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(1998). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1997 – 1998. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(2000). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1999 – 2000. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(2001). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world.2000 – 2001. (En soporte electrónico)

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 27 – 730.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 118 – 159.

Tao.T. (2002).Solving mathematical problems a personal perspective.(En soporte electrónico). Páginas 9 – 34.

Yi Li, K. Math Problem book I (s.a). Hong Kong: Mathematical Society IMO (HK) Comitte. (En soporte electrónico). Páginas 18 – 23.

Kisacanin, B. (2002). Mathematical problems and proofs Combinatorics, Number Theory and Geometry.New York: Kluwer academic publisher. Páginas 73 – 116.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 65 – 188.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico). Páginas 261 – 282.

Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico).Páginas 59 – 87.

Yiu, P. (2007). Number Theory 2. Florida: Spring.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 248 – 253.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 400 – 415.

Hardy, G. H. y Wright, E. M. (1960). An Introduction to The Theory Of Numbers. Glasgow: Oxford University Press. (En soporte electrónico).

Djukic, D. (2007). Arithmetic in Extensions of Q.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.

Belski, A. A. y Kaluzhnin, L. A. (1980). Leciones Populares de Matemáticas. División inexacta. Moscú: MIR.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2010). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2009.USA: Springer. (En soporte electrónico).

ÁLGEBRA:

Factorización de expresiones algebraicas. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas:

Básica:

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948).Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 2 – 22.

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 7 – 13, 19 – 25, 29 – 31, 46 – 52, 54 – 81, 111 – 122, 125 – 138, 144 – 161, 166 – 182, 185 – 205, 241 – 258, 261 - 292.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 120 – 143.

González, M. O. y Mancill, J. D. (1967). Álgebra Elemental Moderna I. Ciudad de la Habana: Pedagógica. Páginas 80 – 264, 281 – 374, 428 – 489.

Baldor, A. (s.a). Álgebra Elemental. (En soporte electrónico). Páginas 5 – 111, 143 – 179, 193 – 232, 236 – 269, 276 – 281, 319 – 369.

Kalnin, R. A. (1978). Álgebra y Funciones Elementales. Moscú: MIR. Páginas 23 – 60, 118 – 159.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 380 – 382.

Campos, O. (2008). Produto Notáveis. En revista Eureka 27. (En soporte electrónico). Páginas 32 – 37.

Complementaria:

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Ejercicios 51 – 80, 120 – 215, 285 – 479, 609 – 1202, 1432 – 1700.

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 12 – 42.

Faddieev, D. y Sominski, I. (1972). Problemas de Álgebra Superior. Moscú: MIR. Páginas 54 – 67, 113 – 117.

Taylor, H. E. y Wade, T. L. (1966). Matemáticas básicas con vectores y matrices. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 159 – 166.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 44 – 61.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 11 – 15, 63 – 67.

Feng, T. (s.a).Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 38 – 42.

Razones y Proporciones.

Básica:

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 100 – 131 y 544 – 590.

Complementaria:

Silva, C. y J. H. Cánepa. (1956). Curso de iniciación matemática. Montevideo: Medina. Páginas 350 – 394.

Progresiones aritméticas, geométrica y armónica. Sucesiones recurrentes.

Básica:

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 66 y 318 – 325.

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 85 – 87.

Carneiro, J. y Moreira, C. G. (2002). Seqüencias aritmético-geométricas. En revista Eureka 14. (En soporte electrónico). Páginas 32 – 34.

Magalhaes, C. (2005). Seqüencia de Fibonacci. En revista Eureka 21. (En soporte electrónico). Páginas 38 – 42.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 74 – 78, 154 – 191.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 283 – 302.

Vorobiov, N. N. (1974). Lecciones Populares de Matemática. Números de Fibonacci. Moscú: MIR. (En soporte electrónico).

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 169 – 244.

Complementaria:

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Ejercicios 489 – 497.

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 9 – 12.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 6 – 7.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 221 – 243.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 11 – 12.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 42 – 46.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 66 – 69.

Zhang, Y. (2011). Combinatorial Problems in Mathematical Competitions. (En soporte electrónico). Páginas 100 – 111.

Polinomios:

Básica:

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 80 – 116, 164 – 208, 301 – 317 y 517 – 587.

Birkhoff, G. and S. MACLane.(1948). A Survey of Modern Algebra. New York: The Macmillan Company. Páginas 77 – 121.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 245 – 269.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 114 – 119.

Djukic, D. (2007). Polynomial Equations.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.(En soporte electrónico).

Djukic, D. (2007). Polynomials in One Variable.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.(En soporte electrónico).

Gomes, C. (2007). Polinomios Simétricos. En revista Eureka 25. (En soporte electrónico). Páginas 46 – 52.

Complementaria:

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Ejercicios 97 – 101.

Andreescu, T. and Andrica, D. (2004). Complex Number from A to Z. (En soporte electrónico).

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 41 – 46, 48 – 49.

Baldor, A. (s.a). Álgebra Elemental. (En soporte electrónico). Páginas 112 – 121.

Kalnin, R. A. (1978). Álgebra y Funciones Elementales. Moscú: MIR. Páginas 372 – 400.

Faddieev, D. Sominski. Y I. (1972). Problemas de Álgebra Superior. Moscú: MIR. Páginas 11 – 22, 78 – 102.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 5 – 6.

Barbeau, E. J. (1989). Polynomials. New York: Springer-Verlag.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 416 – 447.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 68 – 74.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 19 – 20.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 47 – 50.

Ge, Y. (2007). The Method of Vieta Jumping. En Mathematical Reflexion 5. (En soporte electrónico).

Gomes, C. (2006). Polinomios simétricos. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 24. (En soporte electrónico).

Bellot, F. (2006). Problemas cuadráticos de olimpiadas. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 22. (En soporte electrónico).

Álvarez Lobo, J. (2005). Algoritmo de descarte de raíces enteras de polinomios. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 19. (En soporte electrónico).

Funciones y Ecuaciones Funcionales:

Básica:

Ochoa Rojas, R. (2009). Funciones y temas afines. Parte 2. La Habana: Pueblo y Educación.

Tengan, E. (2001). Equacoes Funcionais. En revista Eureka 9. (En soporte electrónico). Páginas 41 – 44.

Moreira, C. G. y Corcao Saldanha, N. (2001). Funcoes Multiplicativas e Funcao do Möbius. En revista Eureka 8. (En soporte electrónico). Páginas 43 – 46.

González, M. O. y Mancill, J. D. (1967). Álgebra Elemental Moderna I. Ciudad de la Habana: Pedagógica. Páginas 375 – 397.

Baldor, A. (s.a). Álgebra Elemental. (En soporte electrónico). Páginas 282 – 300.

Kalnin, R. A. (1978). Álgebra y Funciones Elementales. Moscú: MIR. Páginas 94 – 117, 175 – 214, 243 – 276, 297 – 341.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 271 – 288.

Radovanovic, M. (2007).Functional Equations.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.

Complementaria:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 47 – 48.

Small, Ch. (2000).Functional Equations and How to Solve Them. New York: Springer.(En soporte electrónico).

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 65 – 78.

Papy, F. (1972). Matemática Moderna. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación. Pp. 459. Páginas 88 – 204.

Kannappan, P. (2009). Functional Equations and Inequalities with Applications.(En soporte electrónico). Páginas 1 – 82, 105 – 246.

Lasaosa Medarde, D. (2007). Ecuaciones funcionales. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 30. (En soporte electrónico).

Lasaosa Medarde, D. (2008). Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiadas. Funciones enteras de variable entera. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 31. (En soporte electrónico).

Desigualdades:

Básica:

Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 247 – 260.

Bulajich, R., J. A. Gómez y R. Valdez. (2005). Desigualdades. México: Cuaderno de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico).

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 39, 231 - 238.

Muniz Neto, A. (1999). Desigualdades Elementares. En revista Eureka 5. (En soporte electrónico). Páginas 34 – 49.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 161 – 204.

Lee, H. (2007). Topics in Inequalities – Theorems and Techniques.(En soporte electrónico).

Complementaria:

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Ejercicios 216 – 246, 250 – 260, 1370 – 1431.

Michael Steele, J. (2004). The Cauchy – Schwarz master class. An introduction to the art of mathematical inequalities.(En soporte electrónico).

Matic, I. (2007).Classical Inequalities.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.(En soporte electrónico).

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 7 – 9.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 40 – 43.

Ba Can, V. y Pohoata, C. (2008). Old and New Inequalities.(En soporte electrónico).

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 75 – 97.

Lee, H. (2005). Topics in Inequalities.(En soporte electrónico).

Lee, H. (2005). Topics in Inequalities- Theorems and Techniques.(En soporte electrónico).

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 50 – 56.

Tajra Fonteles, R. (2002). Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpiadas. En revista Eureka 11. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 33.

Boreico, L. y Teleuca, M. (2006). An original method of proving inequalities. En revista Mathematical Reflexión3.(En soporte electrónico).

Van Thuan, P. yVan Hung, T. (2006). Proving inequalities using linear functions. En revista Mathematical Reflexión 4. (En soporte electrónico).

Kim Hung, P. (2007). On the AM-GM Inequality. En revista Mathematical Reflexión 4. (En soporte electrónico).

Dobosevych, O. (2009). On a Method of Proving Symmetric Inequalities. En revista Mathematical Reflexión 1. (Ensoporte electrónico).

BaCan, V. Q. (2007). On a class of three-variable inequalities. En revista Mathematical Reflexión 2. (En soporte electrónico).

Meng, D. (2008). Unrigorously Jensen. En revista Mathematical Reflexión 3. (En soporteelectrónico).

Huu Duc, P. (2008). An unexpectedly useful inequality. En revista Mathematical Reflexión 3. (En soporte electrónico).

Thanh Cong, B. N., Vu Tuan, N. y Trung Kien, N. (2007). The SOS-Schur method. En revista Mathematical Reflexión 5. (En soporte electrónico).

Bellot, F. (2010). El teorema de Muirhead y aplicaciones a problemas de Olimpiadas. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 40. (En soporte electrónico).

Bellot, F. (2012). Sobre la desigualdad de Cauchy (Un enfoque heurístico y algunas aplicaciones). En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 44. (En soporte electrónico).

Trigonometría:

Básica:

Ochoa Rojas, R. (2009). Funciones y temas afines. Parte 2. La Habana: Pueblo y Educación.

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 209 – 219, 225 – 228.

Kalnin, R. A. (1978). Álgebra y Funciones Elementales. Moscú: MIR. Páginas 175 – 273.

Andreescu, T. and D. Andrica.(2001). Complex Numbers from A to Z. Romania: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 20, 29 – 52.

Complementaria:

Andreescu, T. and Z. Feng.(2004). 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team. (En soporte electrónico).

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Ejercicios 1203 – 1369.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 17 – 18.

Andreescu, T. and Z. Feng.(2004). 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team. (En soporte electrónico).

Andreescu, T. and D. Andrica. (2001). Complex Numbers from A to Z. Romania: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 161 – 180, 214 – 228, 237 – 252.

Tsipkin, A. G. (1985). Manual de Matemática para la enseñanza media. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 355 – 397.

Verdiyan, V. y Campos Salas, D. (2007). Simple trigonometric substitutions with broad results. En revista Mathematical Reflexión 3. (En soporte electrónico).

Método de inducción completa:

Básica:

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 13 – 16 y 39 – 40.

Lages Lima, E. (1998). O principio da inducao. En revista Eureka 3. (En soporte electrónico). Páginas 26 – 43.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 205 – 220.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 73.

Kisacanin, B. (2002). Mathematical problems and proofs Combinatorics, Number Theory and Geometry.New York: Kluwer academic publisher. Páginas 165 – 188.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 1 – 7.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 91 – 94.

Complementaria:

Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Ejercicios 81 – 119, 247 – 249 y 261 – 268.

Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico).Páginas 21 – 26.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 7 – 8.

Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 3 – 9.

Bóna, M. (2006). A Walk Through Combinatorics. (En soporte electrónico). Páginas 19 – 36.

Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 77 – 94.

Sistematización:

Fauring, P., Gutiérrez, F., de Araujo, C.G., Wagner, E., y Wykowski, A. (1996). 10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemática. Madrid: FOTOJAE, SA. Problemas 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 3.5, 4.1, 4.2, 4.5, 5.3, 5.6, 6.3, 7.2, 7.4, 8.3, 10.2, 10.6, A1 – A16, D7.

Andrescu, T. and Z. Feng.(1997). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1996 – 1997. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(1998). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1997 – 1998. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(2000). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world.1999 – 2000. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(2001). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world.2000 – 2001. (En soporte electrónico)

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 27 – 730.

Tao. T. (2002). Solving mathematical problems a personal perspective. (En soporte electrónico). Páginas 35 – 48.

Yi Li, K. Math Problem book I (s.a). Hong Kong: Mathematical Society IMO (HK) Comitte. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 9.

Tsipkin, A. G. (1985). Manual de Matemática para la enseñanza media. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 126 – 219.

Taylor, H. E. y Wade, T. L. (1966). Matemáticas básicas con vectores y matrices. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 123 – 166, 231 – 388.

GEOMETRÍA:

Conceptos básicos de la Geometría Plana:

Básica:

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 17 – 23, 25 – 33, 38 – 42, 54 – 67, 76 – 83, 119 – 136.

Wagner, E. (2004). O triangulo e suas principais circunferencias. En revista Eureka 20. (En soporte electrónico). Páginas 17 – 25.

Carneiro, E. y Girao, F. (2005). Centro de massa e aplicacoes a geometría. En revista Eureka 21. (En soporte electrónico). Páginas 29 – 37.

Silva, C. y Cánepa, J. H. (1956). Curso de iniciación matemática. Montevideo: Medina. Páginas 19 – 45,

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 18 – 33.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 98 – 111, 118 – 127.

Velázquez Camacho, M. (2006). Apuntes de geometría para olimpiada. (En soporte electrónico). Páginas 15 – 16, 26 – 28, 30 – 31.

Complementaria:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Problemas 293, 300 - 303, 306, 308 – 310, 315, 323, 348, 352, 362, 363, 367, 368, 374, 380, 385, 386, 387, 389, 390, 393.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 12 (Def: 2.49 – 2.52, 2.58 y Teo: 2.53)

Lang, S. y Murrow, G. (2000). Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 61.

Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 65 – 69.

Hong Ta, S. (2008). A Metric Relation and its Applications.En Mathematical Reflexion 2. (En soporte electrónico).

Movimientos en el plano:

Básica:

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 68 – 75.

Coxeter, H. S. M and S. L Greitzer. (1975). Geometry Revised. EEUU: Mathematical Association of America. (En soporte electrónico). Páginas 80 – 102.

Lang, S. y Murrow, G. (2000). Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 62 – 64, 321 – 355.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 319 – 358.

Complementaria:

Papy, F. (1972). Matemática Moderna. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación. Pp. 459. Páginas 216 – 235, 377 – 440.

Silva, C. y Cánepa, J. H. (1956). Curso de iniciación matemática. Montevideo: Medina. Páginas 170 – 240.

Homotecia:

Básica:

Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Página 27.

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 92 – 94.

Yiu, P. (2001). Introduction to the Geometry of the Triangle.(En soporte electrónico). Páginas 21 – 24.

Soifer, A. (2009). Mathematics as Solving Problems.En soporte electrónico). Páginas 51 – 54.

Complementaria:

Yin Li. K. (2004). Homothety.En Mathematical Excalibur.Volumen 9, número 4. (En soporte electrónico).

Kedlaya, K. (2006). Geometry Unbound. (En soporte electrónico).Páginas 26 – 28.

Yiu, P. (2001). Introduction to the Geometry of the Triangle.(En soporte electrónico). Páginas 15 – 20, 39 – 40.

Andreescu, T. and Z. Feng.(2004). 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team. (En soporte electrónico). Páginas 33 y 203.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 171, 183, 359 – 374.

Zeitz, P. (2007). The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 305 – 306.

Construcciones geométricas:

Básica:

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 47 – 54.

Andonegui Zabala, M. (2006), Conceptos y construcciones elementales. (En soporte electrónico).

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes.(En soporte electrónico). Páginas 8 – 12.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 138 – 143.

Stillwell, J. (2000). The Four Pillars of Geometry.(En soporte electrónico). Páginas 1 – 9.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 183 – 204.

Complementarias

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 100 – 101, 152 – 155.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 21 – 22.

Yiu, P. (2007). The Regular Heptagon by Angle Trisection and Other Constructions.(En soporte electrónico).

Igualdad de triángulos:

Básica:

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 24, 33 – 38, 43 – 47.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 113 – 117.

Escobar Acosta, J. (s.a). Elementos de Geometría. (En soporte electrónico). Páginas 25 – 40.

Toledo Hernández, P. (2005). Geometría. (En soporte electrónico). Páginas 7 – 8, 19, 35 – 36.

Velázquez Camacho, M. (2006). Apuntes de geometría para olimpiada. (En soporte electrónico). Páginas 17 – 18.

Complementaria:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Problemas 350, 373, 381, 401.

Toledo Hernández, P. (2005). Geometría. (En soporte electrónico). Páginas 42, 51.

Lang, S. y Murrow, G. (2000). Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 177 – 209.

Semejanza de triángulos:

Básica:

Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 23, 31 – 32.

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 84 – 91.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 131 – 137.

Velázquez Camacho, M. (2006). Apuntes de geometría para olimpiada. (En soporte electrónico). Páginas 21 – 23.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 11 – 32.

Complementaria:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 292, 297, 340, 346, 349, 364 – 366, 372, 376, 388, 399.

Lang, S. y Murrow, G. (2000). Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 210 – 260.

Stillwell, J. (2000). The Four Pillars of Geometry.(En soporte electrónico). Páginas 13 – 19.

Grupo de Teoremas de Pitágoras:

Básica:

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 95 – 103.

Bottema, O. (2008). Topics in Elementary Geometry. New York: Springer (En soporte electrónico). Páginas 1 – 7

Aarts, J.M. (2008). Plane and Solid Geometry. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 2 – 7.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 128 – 130.

Posamentier, A. (2003). Math Wonders to Inspire Teachers and Students. (En soporte electrónico). Páginas 170 – 173.

Sparks, J. (2008). The Pythagorean Theorem. (En soporte electrónico).

García Capitán, F. (s.a). Algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras. (En soporte electrónico).

Complementaria:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Problemas 314, 345, 375.

Velázquez Camacho, M. (2006). Apuntes de geometría para olimpiada. (En soporte electrónico). Páginas 17 – 19.

Lang, S. y Murrow, G. (2000). Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 9 5 – 109, 123 – 176.

Stillwell, J. (2000). The Four Pillars of Geometry.(En soporte electrónico). Páginas 32 – 33, 38 – 45.

Concurrencia y colinealidad:

Básica:

Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 40.

Coxeter, H. S. M and S. L Greitzer. (1975). Geometry Revised. EEUU: Mathematical Association of America. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 79.

Bottema, O. (2008). Topics in Elementary Geometry. New York: Springer (En soporte electrónico). Páginas 7 – 22, 39 – 42. 85 – 98

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 89 – 100.

Kedlaya, K. (1999). Notes on Euclidean Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 8 – 13.

Complementaria:

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 12 – 13, 15 (Teo: 2.54, 2.57, 2.59 – 2.61).

Shen Loh, P. (2008). Collinearity and concurrence. (En soporte electrónico).

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 34 – 38, 101 – 103.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 178 – 184.

Kedlaya, K. (2006). Geometry Unbound. (En soporte electrónico). Páginas 41 – 46, 60 – 62.

Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 70 – 79.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 106 – 136.

Cuadriláteros cíclicos:

Básica:

Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 25 – 26.

Mendes, M. (1999). Quadrilateros e triangulos. En revista Eureka 5. (En soporte electrónico). Páginas 23 – 26.

Bottema, O. (2008). Topics in Elementary Geometry. New York: Springer (En soporte electrónico). Páginas 19 – 22, 103 – 106.

Aarts, J.M. (2008). Plane and Solid Geometry. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 145 – 162.

Complementaria:

Veide Saravia, J. (2000). Brahmagupta para todos. En revista Eureka 9. (En soporte electrónico). Páginas 28 – 32.

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Problemas 319, 351, 358, 371, 382 – 384, 391.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 12 (Def: 2.80, 2.81, Teo: 2.55, 2.56), Páginas 14 – 15.

Bradley, Ch. (2005). Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present.New York: Oxford University Press. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 28, 92 - 95.

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 45 – 46, 148 – 152.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 6 – 19.

Kedlaya, K. (2006). Geometry Unbound. (En soporte electrónico). Páginas 47 – 54, 67 – 70.

Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 113 – 131.

Bellot Rosado, F. (s.a). Los teoremas de Ptolomeo y su generalización por Casey. Aplicaciones. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática. (En soporte electrónico).

Ayme, J. (2006). El teorema de Feuerbach: una demostración puramente sintética. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 26. (En soporte electrónico).

Trigonometría:

Básica:

Pogorélov, A.V. (1974). Geometría elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 104 – 110.

Andreescu, T. and D. Andrica. (2001). Complex Numbers from A to Z. Romania: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 21 – 28, 39, 53 – 160.

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 8, 12 – 14, 18 - 20.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 144 – 152.

Complementaria:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Problemas 295, 299, 304, 305, 307, 311, 312, 318, 320 – 322, 324, 342 – 344, 354, 356, 357, 359, 361, 370, 378, 395, 398, 403, 407.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A collection of problems suggests for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004. USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 18 – 19.

Andreescu, T. and D. Andrica. (2001). Complex Numbers from A to Z. Romania: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 190 – 213, 229 – 238.

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 31 – 38.

Geometría Analítica. Vectores. Números Complejos. Lugares Geométricos:

Básica:

Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 13 – 22.

Gusiátnikov, P. y S. Reznichenko. Álgebra Vectorial en ejemplos y problemas. Moscú: Editorial MIR, 1988. pp. 257.

Wooton, W y otros. Geometría Analítica Moderna. México: Publicaciones cultural, 1985.

Motta, E. (1999). Aplicacoes dos números complejos a geometría. En revista Eureka 6. (En soporte electrónico). Páginas 30 – 39.

Cameiro, J. (2004). Reta de Euler e números complexos. En revista Eureka 20. (En soporte electrónico). Páginas 31 – 36.

Veloso Uchoa, D. (2008). Substituicoes envolvendo números conplexos. En revista Eureka 27. (En soporte electrónico). Páginas 17 – 24.

Kalnin, R. A. (1978). Álgebra y Funciones Elementales. Moscú: Editorial MIR,. pp. 468. Páginas 160 – 174.

Birkhoff, G. and S. MACLane.(1948). A Survey of Modern Algebra. New York: The Macmillan Company. Páginas 164 – 167.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 290 – 309.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 291 – 316.

Radovanovic, M. (2007), Complex Numbers in Geometry. The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com. (En soporte electrónico).

Aarts, J.M. (2008). Plane and Solid Geometry.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 37 – 85.

Yin Li. K. (1995). Similar Triangles via Complex Numbers. En Mathematical Excalibur. Volumen 1, número 3. (En soporte electrónico).

Yin Li. K. (2004). Geometry via Complex Numbers. En Mathematical Excalibur. Volumen 9, número 1. (En soporte electrónico).

Complementaria:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas Problemas 409 – 420.

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A collection of problems suggests for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004. USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 13 – 14.

Tao. T. (2002). Solving mathematical problems a personal perspective. (En soporte electrónico). Páginas 69 – 82.

Taylor, H. E. y Wade, T. L. (1966). Matemáticas básicas con vectores y matrices. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 167 – 218.

Coxeter, F. (1961). Introduction to Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 135 – 147.

Bradley, Ch. (2005). Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present.New York: Oxford University Press. (En soporte electrónico). Páginas 167 – 184.

Yiu, P. (s.a). Euclidean Geometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 73 – 86.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 154 – 167.

Kedlaya, K. (2006). Geometry Unbound. (En soporte electrónico). Páginas 18 – 21, 28 – 29.

Lang, S. y Murrow, G. (2000). Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 295 – 320.

Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 80 – 87.

Stillwell, J. (2000). The Four Pillars of Geometry.(En soporte electrónico). Páginas 65 – 87.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 289 – 306.

Inversión:

Básica:

Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 93 – 106.

Coxeter, H. S. M and S. L Greitzer. (1975). Geometry Revised. EEUU: Mathematical Association of America. (En soporte electrónico). Páginas 103 – 131.

Djukic, D. (2007). Inversion.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.(En soporte electrónico).

Bottema, O. (2008). Topics in Elementary Geometry. New York: Springer (En soporte electrónico). Páginas 99 – 102

Yin Li. K. (2004). Inversion. En Mathematical Excalibur. Volumen 9, número 2. (En soporte electrónico).

Kedlaya, K. (1999). Notes on Euclidean Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 40 – 45.

Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 433 – 441.

García Capitán, F. (2006). Inversión en Olimpiadas (Aplicación de la inversión a la resolución de problemas). En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 27. (En soporte electrónico).

Complementaria:

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Página 16.

Kedlaya, K. (2006). Geometry Unbound. (En soporte electrónico). Páginas 81 – 86.

Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 442 – 456.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 449 – 464.

Zeitz, P. (2007). The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 307 – 314.

Anarmónico, armónico y polar:

Básica:

Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 41 – 54, 107 – 128.

Coxeter, H. S. M and S. L Greitzer. (1975). Geometry Revised. EEUU: Mathematical Association of America. (En soporte electrónico). Páginas 132 – 153.

Castro, L. (2001). Introducao á geometria projectiva. En revistaEureka 8. (En soporte electrónico). Páginas 16 – 27.

Oliveira de Castro, H. (2004). Dois problemas chineses sobre geometría projetiva. En revista Eureka 20. (En soporte electrónico). Páginas 26 – 30.

Lukic, M. (2007). ProjectiveGeometry. The IMO Compendium Group. Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.(En soporte electrónico).

Coxeter, F. (1961).Introduction to Geometry.(En soporte electrónico). Páginas 229 – 262.

Pohoata, C. (2007). Harmonic Division and its Applications.En Mathematical Reflexión 4. (En soporte electrónico).

Complementaria:

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Página 16 (Def: 2.82, 2.83, Teo: 2.84).

Kedlaya, K. (2006). Geometry Unbound. (En soporte electrónico). Páginas 93 – 102.

Kedlaya, K. (1999). Notes on Euclidean Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 46 – 57.

Sistematización:

Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Problemas 296, 298, 313, 316, 317, 369.

Fauring, P., Gutiérrez, F., de Araujo, C.G., Wagner, E., y Wykowski, A. (1996). 10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemática. Madrid: FOTOJAE, SA. Problemas 1.2, 1.6, 2.2, 2.6, 3.1, 3.3, 3.4, 4.3, 4.4, 5.2, 5.4, 6.6, 7.1, 7.3, 7.5, 7.6, 8.2, 8.4, 8.5, 9.2, 9.4, 10.3, 10.5, G1 – G16.

Andrescu, T. and Z. Feng.(1997). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1996 – 1997. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(1998). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1997 – 1998. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(2000). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world.1999 – 2000. (En soporte electrónico)

Andrescu, T. and Z. Feng.(2001). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world.2000 – 2001. (En soporte electrónico)

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 27 – 730.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 309 – 360.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 280 – 290.

Tao.T. (2002).Solving mathematical problems a personal perspective.(En soporte electrónico). Páginas 49 – 68.

Yi Li, K. Math Problem book I (s.a). Hong Kong: Mathematical Society IMO (HK) Comitte. (En soporte electrónico). Páginas 10 – 17.

Kisacanin, B. (2002). Mathematical problems and proofs Combinatorics, Number Theory and Geometry.New York: Kluwer academic publisher. Páginas 117 – 164.

Tsipkin, A. G. (1985). Manual de Matemática para la enseñanza media. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 220 – 354.

Beskin, N. M. (1976). Lecciones Populares de Matemática: División de un segmento en una razón dada. Moscú: MIR. (En soporte electrónico).

González, M. O. (1952). Matemática Quinto Curso. La Habana: Selecta.

Efímov, N. V. (1984). Geometría Superior. Moscú: MIR.

Gúsiev, V., Litvinenko, V. y Mordkóvich. A. (1989). Prácticas Para Resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico).

MATEMÁTICA DISCRETA:

Razonamiento Lógico:

Básica:

Pérez Seguí, M. L. (2003). Teoría de Números. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. Páginas 2 – 22.

Perelman, Y. (1971). Matemáticas Recreativas. Moscú: MIR. (En soporte electrónico).

Perelman, Y. (1966). Álgebra Recreativa. La Habana: Juvenil. (En soporte electrónico).

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 374 – 378.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 54.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 79 – 91.

Amat Abreu, M. (2004). Problemas de razonamiento lógico. (En soporte electrónico). Páginas 5 – 6.

Complementaria:

Graham, L. (1959). Ingenious Mathematical.Problems and Methods. New York: Dover Publications. (En soporte electrónico).

Graham, L. (1968). The Surprise Attack in Mathematical Problems.New York: Dover Publications. (En soporte electrónico).

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 2.

Tat-Wing, L. (2005). The Method of Infinite Descent.(En soporte electrónico).

Amat Abreu, M. (2004). Problemas de razonamiento lógico. (En soporte electrónico). Páginas 13 – 46.

Lógica y Conjuntos:

Básica:

Ochoa Rojas, R. (2009). Funciones y temas afines. Parte 2. La Habana: Pueblo y Educación. Páginas 1 – 64.

Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico).Páginas 1 – 6.

Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico).Páginas 27 – 34.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 46 – 64, 79 – 91, 751 – 785.

Complementaria:

Tsipkin, A. G. (1985). Manual de Matemática para la enseñanza media. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 15 – 44.

Papy, F. (1972). Matemática Moderna. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación. Pp. 459. Páginas 1 – 52.

Amat Abreu, M. (2004). Problemas de razonamiento lógico. (En soporte electrónico). Página 15.

Coret, M., García, D. y Alavez, E. (s.a). Algebra Moderna. Primera parte. (En soporte electrónico). Páginas 7 – 24.

Paridad:

Básica:

Wagner, E. (1998). Paridade. En revista Eureka 2. (En soporte electrónico). Páginas 32 – 38.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 4 – 6.

Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 5 – 10.

Zeitz, P. (2007). The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 94 – 99.

Complementaria:

Amat Abreu, M. (2004). Problemas de razonamiento lógico. (En soporte electrónico). Páginas 7 – 9.

Warner, E. (s.a). Paridades. (En soporte electrónico).

Barbosa, S. (2006). Paridade. (En soporte electrónico).

Teoría Combinatoria:

Básica:

Pérez Seguí, M. L. (2000). Combinatoria. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico).Páginas 1 – 24, 49 – 62.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 85 – 116.

Kisacanin, B. (2002). Mathematical problems and proofs Combinatorics, Number Theory and Geometry.New York: Kluwer academic publisher. Páginas 1 – 18.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 8 – 12.

Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico).Páginas 7 – 20, 35 – 44, 51 – 54.

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics. Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 115 – 161, 462 – 525.

Merris, R. (2003). Combinatorics.Second Edition. New Jersey: A John Wiley & Sons, Inc., Publication. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 174.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 26 – 44.

Complementaria:

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 22 – 23.

Merris, R. (2003). Combinatorics. Second Edition. New Jersey: A John Wiley & Sons, Inc., Publication. (En soporte electrónico). Páginas 175 – 252.

Sánchez, P. (2002). Apuntes de Combinatoria para la Olimpiada de Matemáticas. (En soporte electrónico). Páginas 2 – 13.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 13 – 14.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 57 – 66.

Amat Abreu, M. (2004). Problemas de razonamiento lógico. (En soporte electrónico). Páginas 9 – 12, 46 – 60.

Vilenkin, N. (1972). ¿De cuántas formas? Combinatoria. Moscú: MIR. (En soporte electrónico).

Zhang, Y. (2011). Combinatorial Problems in Mathematical Competitions.(En soporte electrónico). Páginas 1 – 19, 153 – 181.

Bóna, M. (2006). A Walk Through Combinatorics. (En soporte electrónico). Páginas 37 – 130.

Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 11 – 18, 107 – 122.

Principio de Dirichlet:

Básica:

Pérez Seguí, M. L. (2000). Combinatoria. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico).Páginas 69 – 74.

Pinto Carvalho, P. (1999). O princípio das gavetas. En revista Eureka 5. (En soporte electrónico). Páginas 27 – 33.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 59 – 83.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 79 – 83.

Andzans, A. and B. Johannesson.(2005). Dirichlet Principle. Part II. Riga: Laima Series.

Zhang, Y. (2011). Combinatorial Problems in Mathematical Competitions.(En soporte electrónico). Páginas 20 – 32.

Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 31 – 38.

Yin Li. K. (1995). Pigeonhole Principle. En Mathematical Excalibur. Volumen 1, número 1. (En soporte electrónico).

Complementaria:

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Página 23.

Sánchez, P. (2002). Apuntes de Combinatoria para la Olimpiada de Matemáticas. (En soporte electrónico). Páginas 16 – 18.

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 2 – 4.

García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 9 – 10.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 25 – 29.

Amat Abreu, M. (2004). Problemas de razonamiento lógico. (En soporte electrónico). Páginas 6 – 7.

Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 10 – 14.

Bóna, M. (2006). A Walk Through Combinatorics. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 18.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 385 – 396.

Principio del Elemento Extremo:

Básica:

Rosales Ortega, J. (2001). O principio do elemento extremo. En revista Eureka 8. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 42.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies.New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 39 – 57.

Zhang, Y. (2011). Combinatorial Problems in Mathematical Competitions.(En soporte electrónico). Páginas 123 – 131, 182 – 200.

Complementaria:

Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 9 – 10.

Feng, T. (s.a).Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 22 – 24.

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 375 – 384.

Principio de Invarianza:

Básica:

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 24.

Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 123 – 134.

De Oliveira, M. (2002). O principio da invariancia. En revista Eureka 14. (En soporte electrónico). Páginas 35 – 42.

Carroll, G. (2000). MONOVARIANTS. (En soporte electrónico).

Zeitz, P. (2007). The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 92 – 93.

Complementaria:

Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 90 – 93.

Feng, T. (s.a). Solutions for The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 29 – 32.

Gomes, C. (2005). Uma soma incrivilmente invariante. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 19. (En soporte electrónico).

Golberg, O. (2007). Invariants. (En soporte electrónico).

Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 410 – 412.

Coloraciones, tableros y juegos:

Básica:

Pérez Seguí, M. L. (2000). Combinatoria. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico). Páginas 79 – 82.

Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 25 – 37, 361 – 371.

Fritsch, R. y Fritsch, G. (1998). The Four-Color Theorem.History, Topological Foundations, and Idea of Proof. New York: Springer-Verlag.(En soporte electrónico).

Merris, R. (2003). Combinatorics.Second Edition. New Jersey: A John Wiley & Sons, Inc., Publication. (En soporte electrónico). Páginas 337 – 371.

Carneiro, E. (2004). Tabuleiros - Coberturas e Coloracões. (En soporte electrónico).

Complementaria:

Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico).Páginas 117 – 125.

Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 57 – 64.

Berlekamp, E., Conway, J. y Guy, R. (2001). Winning Ways for your Mathematics Plays.Volumen 1. (En soporte electrónico).

Berlekamp, E., Conway, J. y Guy, R. (2003). Winning Ways for your Mathematics Plays.Volumen 2. (En soporte electrónico).

Berlekamp, E., Conway, J. y Guy, R. (2003). Winning Ways for your Mathematics Plays.Volumen 3. (En soporte electrónico).

Berlekamp, E., Conway, J. y Guy, R. (2004). Winning Ways for your Mathematics Plays.Volumen 4. (En soporte electrónico).

Carballosa, W. (2005). Algunos problemas. La coloración en las Matemáticas. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 19. (En soporte electrónico).

<u>Conteo Doble:</u>

<u>Básica:</u>

Carneiro, J. (2000). Contar duas vezes para generalizar. En revista Eureka 8. (En soporte electrónico). Páginas 28 – 32.

Yuzo Shine, C. (2002). Grafos e contage dupla Eureka 12. (En soporte electrónico). Páginas 31 – 39.

Carneiro, J. (1999). Contar de duas maneiras, para generalizar. En revista Eureka 6. (En soporte electrónico). Páginas 15 – 17.

<u>Complementaria:</u>

Zhang, Y. (2011). Combinatorial Problems in Mathematical Competitions. (En soporte electrónico). Páginas 87 – 99.

<u>Sistematización:</u>

Fauring, P. y otros (2008). 10 Matemáticos. 100 Problemas. (En soporte electrónico).

Fauring, P., Gutiérrez, F., de Araujo, C.G., Wagner, E., y Wykowski, A. (1996). 10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemática. Madrid: FOTOJAE, SA.Problemas 5.1, 6.1, 6.2, 8.6, 9.3, 9.5, 10.4, D1, D2, D5, D6, D8 – D13.

Andreescu, T. and Z. Feng.(1997). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1996 – 1997. (En soporte electrónico)

Andreescu, T. and Z. Feng.(1998). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world. 1997 – 1998. (En soporte electrónico)

Andreescu, T. and Z. Feng.(2000). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world.1999 – 2000. (En soporte electrónico)

Andreescu, T. and Z. Feng.(2001). Mathematical Olympiads.Problems and solutions fron around the world.2000 – 2001. (En soporte electrónico)

Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 27 – 730.

Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 120 – 143.

Tao. T. (2002). Solving mathematical problems a personal perspective. (En soporte electrónico). Páginas 83 – 98.

Yi Li, K. Math Problem book I (s.a). Hong Kong: Mathematical Society IMO (HK) Comitte. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 27.

Kisacanin, B. (2002). Mathematical problems and proofs Combinatorics, Number Theory and Geometry.New York: Kluwer academic publisher. Páginas 19 – 72.

Andreescu, T. y Feng, Z. (2007). 102 CombinatorialProblems. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico).

Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico).

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 787 – 914.

Merris, R. (2003). Combinatorics.Second Edition. New Jersey: A John Wiley & Sons, Inc., Publication. (En soporte electrónico). Páginas 253 – 336.

Scheinerman, E. R. (2004). Matemáticas Discretas. Volumen 1. La Habana: Félix Varela.

Scheinerman, E. R. (2004). Matemáticas Discretas. Volumen 2. La Habana: Félix Varela.

Sánchez, P. (2002). Apuntes de Combinatoria para la Olimpiada de Matemáticas. (En soporte electrónico). Páginas 18 – 22.

Boju, V. y Funar, L. (2007). The Math Problems Notebook. (En soporte electrónico)

Polya, G., Kilpatrick, J. (1974). The Stanford Mathematics Problems Book with hints and solutions. (En soporte electrónico).

TEMAS COMPLEMENTARIOS

Fracciones continuas:

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition. Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 303 – 348.

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 282 – 314.

Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 97 – 119.

Desigualdades Geométricas:

Andreescu, T., Mushkarov, O. y Stoyanov, L. (2000).Geometric Problems on Maxima and Minima. Boston: Birkhäuser.

Inversión de Möbius:

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 161 – 166.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Página 36 – 37.

Optimización discreta:

Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 989 – 1067.

Símbolo de Legendre y Jacobi:

Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 315 – 333.

Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 175 – 185.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 65 – 70.

Números de Mersenne y Fermat:

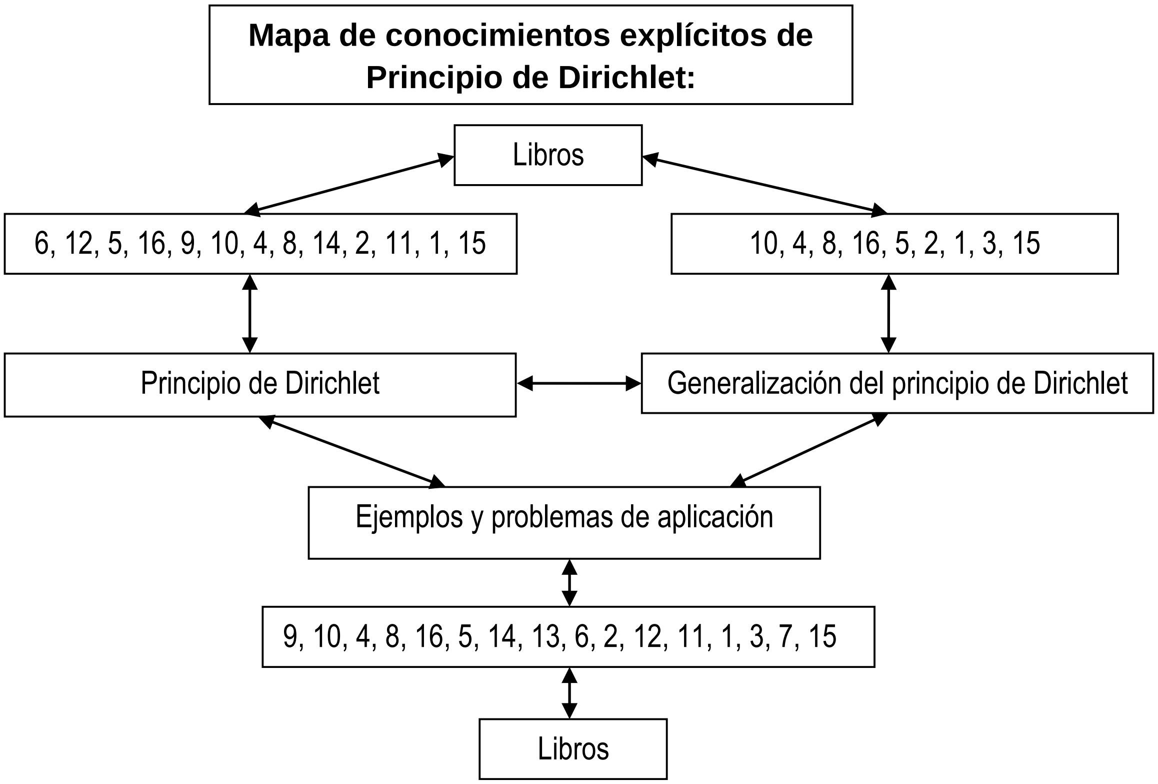
Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 334 – 350.

Godsil, Ch. y Royle, G. (2001).Algebraic Graph Theory.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico).Páginas 1 – 76.

Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 70 – 72.

ALGUNOS MAPAS DE CONOCIMIENTOS DE CONTENIDOS IMPORTANTES PARA LA PREPARACIÓN

Matemática Discreta:



Libros utilizados:

Libro 1.Bóna, M. (2006). A Walk Through Combinatorics. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 18.

Libro 2.Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 10 – 14.

Libro 3. Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 23, 33, 35, 90, 117 – 118, 202, 214, 246, 250, 253, 256, 304, 324, 341, 346, 388, 418 – 419, 483, 495 – 497, 522, 531, 539, 548, 653, 705.

Libro 4.Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 59 – 83.

Libro 5.Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 31 – 38.

Libro 6.García Capitán, F. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. (En soporte electrónico). Problemas 9 – 10.

Libro 7.Khan, A. (2006). The Pidgeonhole Principle. (En soporte electrónico)

Libro 8.Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 79 – 83.

Libro 9. Pérez Seguí, M. L. (2000). Combinatoria. México: Cuadernos de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico). Páginas 69 – 74.

Libro 10.Pinto Carvalho, P. (1999). O princípio das gavetas. En revista Eureka 5. (En soporte electrónico). Páginas 27 – 33.

Libro 11.Prasolov, V. (s. a). Problems in Plane and Solid Geometry. (En soporte electrónico). Páginas 385 – 396.

Libro 12.Sánchez, P. (2002). Apuntes de Combinatoria para la Olimpiada de Matemáticas. (En soporte electrónico). Páginas 16 – 18.

Libro 13.Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 2 – 4.

Libro 14. Yin Li. K. (1995). PigeonholePrinciple. En MathematicalExcalibur. Volumen 1, número 1. (En soporte electrónico).

Libro 15.Zeitz, P. (2007). The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Página 94. Analiza la paridad como una invariante. Páginas 95 – 99, problemas 3.4.7 – 3.4.11.

Libro 16. Zhang, Y. (2011). Combinatorial Problems in Mathematical Competitions. (En soporte electrónico). Páginas 20 – 32.

Teoremas, procedimientos y relaciones:

Principio de Dirichlet:

Libro 6. Página 13.

Libro 12. Página 16.

Libro 5. Página 31, se ofrece el principio en la forma usual con n + 1 objetos y n cajas y se demuestra utilizando contradicción.

Libro 16. Páginas 20 – 21 (se da el primer principio en una forma general, con m objetos y n cajas, realiza una demostración por contradicción, en el corolario siguiente ofrece de otra forma el principio y lo demuestra también por contradicción).

Libro 9. Página 69 (lo ofrece con m objetos y n casillas, con $m > n$).

Libro 10. Páginas 27. (Se trabaja con n objetos y n – 1 casillas, después se ofrece otra forma de enunciarlo utilizando inyectividad de funciones).

Libro 4. Páginas 59 (lo ofrece con n + 1 objetos y n cajas).

Libro 8. Páginas 79 (lo obtiene como un caso particular del principio enunciado de forma general).

Libro 14. Página 1.

Libro 2. Página 10.

Libro 11. Página 385, lo trabaja con m objetos y n cajas.

Libro 1. Páginas 1, ofrece el principio con m objetos y n cajas y se demuestra por contradicción.

Libro 15. Página 84.

<u>Generalización del principio de Dirichlet</u>:

Libro 10. Página 31.

Libro 4. Página 60, en el problema sin solución 5 se ofrece la generalización del principio.

Libro 8. Páginas 79.

Libro 16. Página 21 (se da el segundor principio en una forma general, con m objetos y n cajas, realiza una demostración por contradicción, en el corolario siguiente ofrece de otra forma el principio y lo demuestra también por contradicción).

Libro 5. Página 32. En la página 35 aparece otra generalización importante de este principio (si la suma de n o más números es igual a S, entonces entre esos números existirán uno o más números no mayores que $\frac{S}{n}$, y también uno o más números no menores que $\frac{S}{n}$, lo cual se demuestra por contradicción).

Libro 2. Página 10.

Libro 1. Página 3.

Libro 3. Página 23, teorema 2.144.

Libro 15. Página 86. Plantea que si se tienen t objetos y n cajas entonces al menos una caja contiene $\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil$ objetos.

<u>Ejemplos y problemas de aplicación</u>:

Libro 9. Páginas 69 – 74. Páginas 98, 105, 129, problema 34 (se utiliza, además, que todo número entero se puede expresar en la forma $2^k \cdot b, k \geq 0$, b impar)

Libro 10. Páginas 27 – 33.

Libro 4. Páginas 59 – 60 (se ofrecen problemas elementales sin soluciones). Páginas 60 – 68 (se proponen 15 ejemplos interesantes de aplicación). Páginas 68 – 83 (se proponen 71 problemas con soluciones).

Libro 8. Páginas 79 – 83 (se ofrecen varios problemas interesantes resueltos).

Libro 16. Páginas 21 – 32, se ofrecen varios ejemplos interesantes.

Libro 5. Páginas 31 – 33, problemas 1, 2 (son dos problemas sencillos que pueden servir para comprender la esencia del principio). Páginas 32 – 37, problemas 5 – 34, algunos de los cuales aparecen con soluciones junto con el mismo problema, los restantes problemas están resueltos en las páginas 223 – 226).

Libro 14. Se proponen problemas interesantes con soluciones.

Libro 13. Páginas 2 – 4. Se ofrecen problemas interesantes con soluciones.

Libro 6. Páginas 13 – 14, problemas 9 – 10.

Libro 2. Páginas 10 – 14. Se proponen problemas interesantes, ejemplos del 7 al 10, y se proponen una serie de problemas.

Libro 12. Páginas 16 – 18.

Libro 11. Páginas 385 – 396, problemas 21.1 – 21.29.

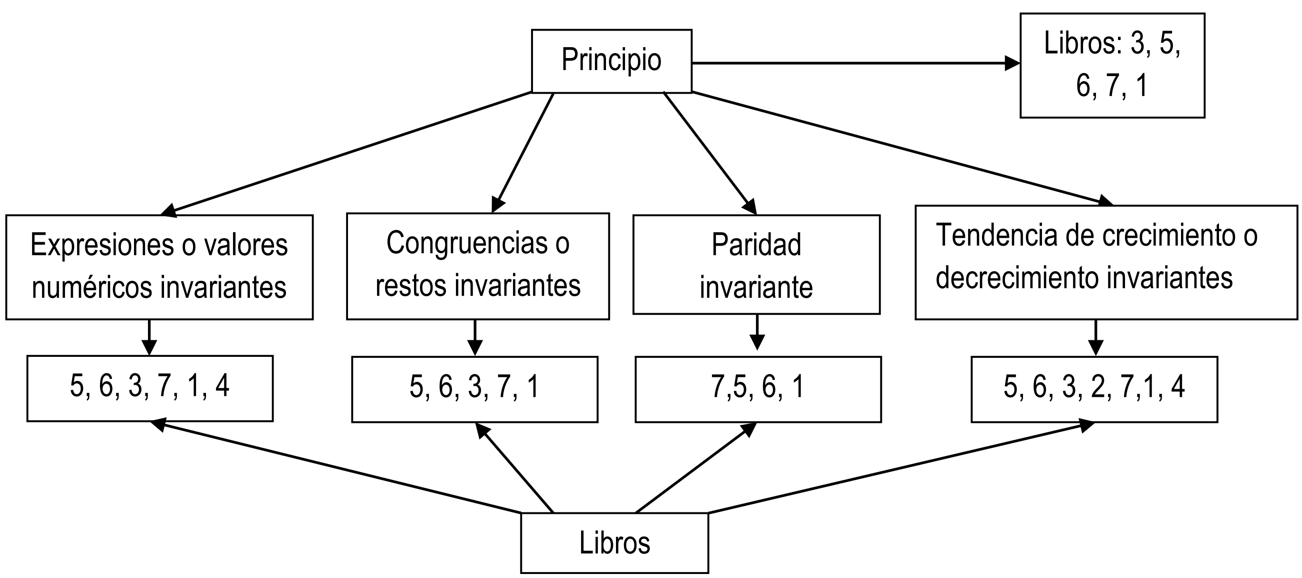
Libro 1. Páginas 1 – 18, aparecen 7 ejemplos interesantes y problemas propuestos.

Libro 3. Páginas 33, 341, problema 4. Páginas 35, 346, problema 6. Páginas 90, 388, problema 12. Páginas 117, 418, problema 34. Páginas 118, 419, problema 39. Páginas 202, 483, problema 8. Páginas 214, 495 – 496, problema 15. Páginas 214, 497, problema 18. Páginas 246, 522, problema 17. Páginas 250, 531, problema 4. Páginas 253, 539, problema 22. Páginas 256, 548, problema 12. Páginas 304, 653, problema 16. Páginas 324, 705, problema 11.

Libro 7. Se ofrecen 7 problemas resueltos y 12 propuestos.

Libro 15. Páginas 84 – 91, problemas 3.3.1 – 3.3.9.

Mapa de conocimientos explícitos de Principio de Invarianza:



<u>Libros utilizados</u>:

Libro 1.Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 90 – 93.

Libro 2.Carroll, G. (2000). Monovariants. (En soporte electrónico).

Libro 3.De Oliveira, M. (2002). O principio da invariancia. En revista Eureka 14. (En soporte electrónico). Páginas 35 – 42.

Libro 4. Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 33, 35, 90, 117, 118, 202, 214, 246, 250, 253, 256, 304, 324, 341, 346, 388, 418 – 419, 483, 495 – 497, 522, 531, 539, 548, 653, 705.

Libro 5.Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 24.

Libro 6.Fomin, D., Genkin, S. y Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles. (En soporte electrónico). Páginas 123 – 134.

Libro 7.Zeitz, P. (2007). The Art and Craft of Problem Solving. (En soporte electrónico). Páginas 92 – 93.

Teoremas, procedimientos y relaciones:

Principio de invarianza:

Libro 3. Página 35.

Libro 5. Página 1.

Libro 6. Página 123.

Libro 7. Página 92.

Libro 1. Página 90.

Problemas sobre expresiones o valores numéricos invariantes:

Libro 5. Página 2, problemas 1 – 3. Página 5, problema 7. Engel, A. (1997). Páginas 8 – 23, problemas 2, 11, 15 – 16, 20 – 21, 27, 30, 34, 39, 44 – 46, 48 – 50, 53 – 54, 57, 59 – 60.

Libro 6. Páginas 123 – 134, 254 – 257, problemas 1, 3, 5, 11 – 12, 15, 23, 25 – 26, 30.

Libro 3. Páginas 35 – 36. Ejemplos 1.1 – 1.3.

Libro 7. Páginas 92 – 93, problemas 3.4.1 – 3.4.4.

Libro 1. Páginas 92 – 94, 260 – 264, problemas 2, 7 – 11, 14 – 16.

Libro 4. Páginas 93, 392, problema 12. Páginas 155, 453, problema 10. Páginas 246, 523, problema 19. Páginas 300, 642, problema 22.

Problemas sobre congruencias o restos invariantes:

Libro 5. Páginas 8 – 23, problemas 4 – 5, 7, 9, 13 – 14, 18, 22, 42, 51 – 52, 55, 58.

Libro 6. Páginas 123 – 134, 254 – 257, problemas 10, 16 – 18, 20, 22, 27 – 28.

Libro 3. Páginas 36 – 39. Ejemplos 2.1 – 2.5.

Libro 7. Página 94, problemas 3.4.5 – 3.4.6. Páginas 100 – 101, problema 3.4.12.

Libro 1. Páginas 92 – 94, 260 – 264, problemas 5 – 6.

Problemas sobre paridad invariante:

Libro 7. Página 94. Analiza la paridad como una invariante. Páginas 95 – 99, problemas 3.4.7 – 3.4.11.

Libro 5. Páginas 8 – 23, problemas 3, 6, 19, 25 – 26, 31 – 33, 36 – 38, 41, 47.

Libro 6. Páginas 123 – 134, 254 – 257, problemas 2, 6 – 9, 13 – 14, 21, 24, 29.

Libro 1. Páginas 92 – 94, 260 – 264, problemas 1, 3 – 4, 12, 15.

Problemas sobre tendencia de crecimiento o decrecimiento invariantes:

Libro 5. Página 2 – 4, problemas 4 – 6. Páginas 5 – 9, problema 8 – 10. Páginas 8 – 23, problemas 1, 8, 10, 12, 17, 23 – 24, 28 – 29, 35, 40, 43, 56.

Libro 6. Páginas 123 – 134, 254 – 257, problemas 3 – 4.

Libro 3. Páginas 39 – 40. Ejemplos 3.1 – 3.3.

Libro 2. Se ofrecen 4 problemas resueltos con explicaciones sobre el uso de este método y se proponen 11 problemas relacionados.

Libro 7. Página 94. Analiza la paridad como una invariante. Página 102, problema 3.4.14.

Libro 1. Páginas 92 – 94, 260 – 264, problema 13.

Libro 4. Páginas 279, 583, problema 9.

Teoría de Números:

Mapa de conocimientos explícitos de Divisibilidad:

	Libros
Definición de divisibilidad	3, 14, 4, 16, 8, 7, 2, 12, 14
Propiedades de la divisibilidad	13, 4, 3, 16, 2, 12, 14
Algoritmo de división	3, 4, 16, 8, 2, 6, 15
Definición de número primo	3, 16, 4, 7, 2
Definición de número primo relativos	4, 16, 2, 3, 14, 15
Caracterización para determinar si un número es primo	13, 2, 14
Criba de Eratóstenes	13, 4, 12, 15
Infinitud del conjunto de los números primos	3, 5, 16, 8, 4, 7, 2, 1
Mayor potencia de un número primo que divide a n!	3, 5, 4, 6
Teorema fundamental de la aritmética	3, 5, 16, 8, 4, 7, 2, 15
Descomposición canónica	3, 4, 6
Definición de máximo común divisor (mcd)	4, 3, 2, 12, 14, 15
Propiedades del mcd	3, 4, 2, 14, 15
Algoritmo de Euclides	3, 4, 2, 7, 6, 12, 14, 15
Definición de mínimo común múltiplo (mcm)	3, 4, 16, 2, 12, 14
Propiedades del mcm	2, 3, 4, 16, 12, 14
Cantidad de divisores positivos de un número	13, 5, 4, 2, 15
Suma y producto de los divisores positivos de un número	15, 4, 2
Criterios de divisibilidad	13, 2, 15, 10, 11
Otras propiedades relacionadas con los números primos	4, 7, 1

Libros utilizados:

Libro 1.Aigner, M. y Ziegler, G. (s.a). Proofs from the Book.(En soporte electrónico).Páginas 3 – 6, 17 – 22.

Libro 2.Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 18, 46 – 51.

Libro 3.Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 15 – 32.

Libro 4. Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico). Páginas 13 – 31, 39 – 60.

Libro 5. Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 341 – 358.

Libro 6.Larson, L. C. Problem (1983). Solving Through Problems. New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 84 – 113.

Libro 7.Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico). Páginas 55 – 72.

Libro 8.Moreira, C. G. (1999). Divisibilidade, congruencia e aritmética módulo n. En revista Eureka 2. (En soporte electrónico). Páginas 41 – 43.

Libro 9.Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico).Páginas 17 – 36.

Libro 10. Perelman, Y. (s.a). Álgebra recreativa. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 87 – 91.

Libro 11. Reynoso Meza, G. (2005). Apuntes de Teoría de Números. (En soporte electrónico). Páginas 5 – 6.

Libro 12.Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics. Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 255 – 265, 270 – 293, 330 – 331.

Libro 13.Rosell Franco, S. (1963). Aritmética I. La Habana: MINED. Páginas 175 – 209.

Libro 14.Sierpinski, W. (1964). Elementary theory of numbers. Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 27, 33 – 34, 110 – 185.

Libro 15.Tattersall, J. (1999). Elementary number theory in nine chapters.New York: Cambridge University Press. (En soporte electrónico). Páginas 49 – 69, 79 - 123.

Libro 16.Vorobiov, N. N. (1984). Lecciones Populares de Matemática: Criterios de Divisibilidad. Moscú: MIR. (En soporte electrónico).

Distribución de temas por los libros utilizados:

Definiciones:

Definición de número primo:

Libro 3. Página 21

Libro 16. Página 23

Libro 4. Página 39. Definición 3.1.

Libro 7. Página 88.

Libro 2. Página 1. Se demuestra, además, que todo número entero mayor que 1 tiene al menos un divisor primo, utilizando el método de descenso infinito.

Definición de números primos relativos:

Libro 4. Página 22, 23. Se ofrece además una caracterización de números primos relativos tomando en cuenta que el 1 se pueda expresar como combinación lineal de esos números.

Libro 15. Página 23. En la página 24 se ofrece, además, una caracterización relacionada con el teorema fundamental de la aritmética, teorema 15.

Libro 2. Página 11.

Libro 3. Página 99.

Libro 12.Páginas 261.

Libro 14. Páginas 11.

Libro 15. Página 61. Teorema 2.7 (define primos relativos a partir de las combinaciones lineales).

Definición de divisibilidad:

Libro 3. Página 15

Libro 14. Página 7

Libro 4. Página 20

Libro 16. Página 10. Se utiliza una notación de divisibilidad diferente a la utilizada usualmente en Cuba.

Libro 8. Página 41.

Libro 7. Página 87.

Libro 2. Página 1. En La página 9 se ofrece una notación para La mayor potencia de um primo que divide a un número entero, muy utilizada en varias bibliografias, se ofrecen además ejemplos de cómo utilizarla.

Libro 12. Página 255.

Libro 15. Páginas 50 – 51.

<u>Definición de máximo común divisor</u>:

Libro 4. Página 21. Se ofrece una definición partiendo de determinar los divisores comunes de dos números para lo cual se ofrece un ejemplo.

Libro 3. Página 16

Libro 2. Página 11.

Libro 12.Páginas 261.

Libro 14. Páginas 11.

Libro 15. Páginas 58 – 59.

<u>Definición de mínimo común múltiplo</u>:

Libro 3.Página 16

Libro 4.Página 29

Libro 16.Página 23.

Libro 2. Página 16.

Libro 12.Páginas 261.

Libro 14.Página 10.

Teoremas, procedimientos y relaciones:

Propiedades de la divisibilidad:

Libro 13. Páginas 175 – 182.

Libro 4.Página 20, 40. Teorema 3.1 (corolarios 1 y 2). Se ofrecen propiedades elementales con demostración. Página 104. En el teorema 6. 1 se ofrece la divisibilidad a partir de la descomposición canónica de los números.

Libro 3.Página 15. Se ofrecen algunas propiedades generales de la divisibilidad con su demostración y ejemplos de un nivel avanzado.

Libro 16.Páginas 12, 23 – 25, teoremas 1 – 6, 12, 13, 16, 17. En el teorema 17 se ofrece la divisibilidad a partir de la descomposición canónica de los números.

Libro 2. Páginas 1 – 2. Página 8, corolario 1.5. Se demuestran aplicando La definición y se ofrecen algunos ejemplos de aplicación.

Libro 12.Páginas 255 – 256.

Libro 15.Página 51. Teorema 2.8.

Caracterización para determinar si un número es primo:

Libro 13. Páginas 200 – 203.

Libro 2. Página 5. Se ofrecen elementos que permiten determinar cuándo un número es primo.

Libro 14.Página 110. Teorema 1.

Criba de Eratóstenes:

Libro 13. Páginas 198 – 199.

Libro 4.Página 44 – 46.

Libro 12.Páginas 280.

Libro 15.Páginas 79 – 80. Plantea que una manera de facilitar el proceso es considerar solo los números impares y comenzar a probar con el 3.

Infinitud del conjunto de los números primos:

Libro 3.Página 26. Se demuestra utilizando el método de reducción al absurdo y se ofrece además una demostración dada por Paul Erdös.

Libro 5.Página 410.

Libro 16.Página 23

Libro 8.Página 42 – 43.

Libro 4.Página 46. Se presenta la demostración ofrecida por Euclides. Se ofrece además la forma de obtener el producto de todos los números primos menores que un número primo p.

Libro 7.Página 93. Teorema 6.4.1. Se presenta además el teorema que garantiza la existencia de cualquier cantidad finita de números compuestos consecutivos.

Libro 2. Página 6. Teorema 1.3a. Página 8 se ofrece una demostración alternativa utilizando el teorema de factorización en números primos. En el ejemplo 1.8 se ofrece, además, um procedimiento para determianar cualquier cantidad de números compuestos consecutivos. Se ofrece la demostración de Euclides.

Libro 1. Páginas 3 – 6. Ofrece 6 demostraciones de la infinitud del conjunto de los números primos, en la primera aparece la prueba de Euler, además, se ofrecen pruebas utilizando los números de Mersenne y los de Fermat y otros contenidos avanzados.

Mayor potencia con que un número primo divide a n!:

Libro 3.Página 29. Se demuestra la proposición y se ofrece un ejemplo sencillo.

Libro 5.Páginas 414 – 415. También se ofrece la propiedad de que el producto de r enteros consecutivos es divisible por r!. Se utiliza una notación de factorial diferente a la utilizada usualmente en Cuba.

Libro 4.Página 117 - 118, teorema 6.9. Se demuestra además que el coeficiente binomial es entero. También se ofrece la propiedad de que el producto de r enteros consecutivos es divisible por r!.

Libro 6.Páginas 103 – 104. En el ejemplo 3.3.10.

Teorema fundamental de la aritmética:

Libro 3.Página 25. Se enuncia y se demuestra utilizando inducción matemática y se utiliza para determinar la forma que deben tener los divisores de un número.

Libro 5.Página 411.

Libro 16.Página 24.

Libro 8.Página 42.

Libro 4.Página 41. Teorema 3.2.

Libro 7.Páginas 90 – 91. Teorema 6.3.1.

Libro 2. Página 7. Teorema 1.4.

Libro 15.Páginas 82 – 83. Teorema 3.4

Descomposición canónica de un número:

Libro 13. Páginas 203 – 205.

Libro 3.Página 25

Libro 4.Página 42

Libro 6.Páginas 100 – 102.

Cantidad de divisores de un número:

Libro 13. Páginas 205 – 209. Se ofrece, además, cómo determinar todos los divisores de un número y las parejas de divisores que multiplicados dan como resultado el número.

Libro 5.Páginas 411 – 413. Además de ello se aborda el número de formas en que un número compuesto puede ser expresado como el producto de dos factores y como el producto de dos factores primos relativos.

Libro 4.Ver definición 6.1 de la página 103 para la notación. Página 105, teorema 6.2 a.

Libro 2. Página 8. Páginas 17 – 18. Proposición 1.13, con corolarios 1.14 (cantidad de pares ordenados cuyo mcm es n), 1.16 (cota del número de divisores positivos de un número); ver, además, los ejemplos que aparecen porque son muy útiles en la resolución de otros problemas.

Libro 15.Páginas 82 – 83. Se aborda la notación que representa la mayor potencia de un primo que divide a n. Página 86, teorema 3.5.

Suma y producto de los divisores de un número:

Libro 15.Página 413.

Libro 4.Ver definición 6.1 de la página 103 para la notación. Página 105, teorema 6.2 b. (suma de los divisores de un número).

Libro 2. Páginas 18 – 19. En el corolario 1.16 se ofrece el producto de los divisores positivos de un número. En la proposición 1.17 aparece la relación para determinar la suma de los divisores positivos de un número.

Criterios de divisibilidad:

Libro 13. Páginas 184 – 195. Se ofrecen los criterios del 2, 3, 5, 7, 11, un método general para números primos, 13, 17, 19, por potencias de 10, 9.

Libro 2. Páginas 46 – 49. Proposición 1.44. Se ofrecen los criterios de divisvilidad por 3, 9, 11, 7, 13, 27, 37, potencias de 2 y potencias de 5. En el inciso d se ofrece un criterio para 7, 11, 13 que puede ser más general (separando el número de derecha a izquierda en períodos de orden 3, sumando los que ocupan orden par entre ellos y los que ocupan orden impar entre ellos y realizando la diferencia entre estas dos cantidades que tiene el mismo comportamiento, en cuanto a la divisibilidad por estos números que el número original). También se ofrecen algunos ejemplos interesantes.

Libro 15. Página 158 – 160. Teorema 5.8 (criterios del 3, 9, 11), ejemplo 5.6 (criterio del 7), ejemplo 5,7 (criterio del 13)

Libro 10. Páginas 87 – 91. Criterio del 11 (se ofrece otro criterio útil para números pequeños), criterio del 19.

Libro 11. Páginas 5 – 6. Se enuncian los criterios.

Algoritmo de división:

Libro 3.Página 16

Libro 4.Páginas 17 – 18. Se demuestra la existencia y la unicidad del cociente y el resto en la división de dos enteros no nulos y se ofrecen ejemplos sencillos.

Libro 16.Página 21 – 22.

Libro 8.Página 41.

Libro 2. Páginas 4 – 5. Teoremas 1.2 a, 1.2 b.

Libro 6.Página 85.

Libro 15.Páginas 52 – 53. Páginas 89 – 90, teorema 3.6.

Propiedades del máximo común divisor:

Libro 3.Página 21. Se ofrecen las demostraciones de las propiedades y se resuelve un ejemplo.

Libro 4.Páginas 21 – 22, 27 – 28.

Libro 2. Página 11 – 12. Página 13 – 14, teorema 1.7 (identidad de Bézout) com corolarios 1.8, 1.9, 1.10 y ejemplos.

Libro 12.Páginas 261 – 262. Propiedades: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 24 (forma del mcd en función de su representación canónica). (Se ofrecen muchas propiedades importantes).

Libro 14.Páginas 11. Teorema 2

Libro 15.Páginas 59 – 61. Teorema 2.6 (mcd como el mínimo del conjunto de combinaciones lineales positivas de dos números), se ofrecen propiedades importantes del mcd. Terema 2.12 (algoritmo de Saunderson).

Propiedades del mínimo común múltiplo:

Libro 2. Página 16. Se ofrecen propiedades básicas del mínimo común múltiplo y a continuación se presenta La relación entre este y el máximo común divisor.

Libro 3.Página 22. Se demuestra una relación muy importante existente entre el mcd y el mcm.

Libro 4.Página 30. Se demuestra una relación muy importante existente entre el mcd y el mcm.

Libro 16.Página 23, teoremas 11 y 12.

Libro 12.Páginas 261 – 262. Propiedades: 2, 19, 20, 21, 22, 23, 24 (forma del mcm en función de su representación canónica). Además se establecen en las propiedades 25, 26 y 27 relaciones entre mcd y mcm. (se ofrecen muchas propiedades importantes).

Libro 14.Páginas 10. Teorema 1. Página 14, teorema 4 (relación entre mcd y mcm).

<u>Algoritmo de Euclides para determinar mcd</u>:

Libro 3.Página 19. Se ofrece una demostración y un ejemplo sencillo de cómo utilizarlo y otro con mucho más nivel.

Libro 4.Páginas 26 – 28. Se ofrece la demostración y ejemplos.

Libro 2. Página 12 – 13. Se ofrecen, además, ejemplos de aplicación.

Libro 7.Páginas 100 – 104. Lema 6.6.1, teoremas 6.6.2 (cota del número de pasos que se deben efectuar para determinar por el algoritmo de Euclides el mcd de dos enteros), 6.6.3 (el mcd se puede representar como combinación lineal de los elementos).

Libro 6.Página 91.

Libro 12.Página 263.

Libro 14.Páginas 70 – 71.

Libro 15.Páginas 64 – 66. Teorema 2.10, 2.11 (cantidad de pasos en el algoritmo de Euclides).

<u>Otras propiedades donde se utilizan números primos</u>:

Libro 4.Página 47 – 48, 53 – 55. Lema página 54 y teoremas 3.6, 3.7 (Dirichlet), 3.8. Se ofrece una forma de acotar el n-ésimo número primo, así como el mínimo de la cantidad de números primos hasta una potencia dada.

Libro 7.Páginas 97 – 98. Lema 6.5.2.

Libro 1. Página 7. Postulado de Bertrand.

Mapa de conocimientos explícitos de Congruencia Aritmética:

	Libros
Definición de congruencia aritmética	18, 13, 7, 3, 19, 10, 4, 1, 9, 8, 6, 5, 11, 15
Propiedades de la congruencia aritmética	18, 14, 7, 3, 19, 10, 4, 1, 9, 8, 13, 6, 11, 15
Procedimiento para buscar las últimas cifras de un número	3, 8
Clases residuales	3, 10
Inverso multiplicativo	3, 10
Sistema completo de restos	18, 3, 10, 4, 1, 17
Teoremas de Euler, Fermat y Wilson	18, 7, 3, 12, 17, 10, 4, 1, 2, 5
Resolución de ecuaciones y sistemas en congruencias	18, 4, 9, 16, 3
Teorema de los restos chinos	4, 3, 8, 10, 5
Definición de orden	3, 10, 4, 1
Definición de raíces primitivas	18, 3, 10, 4
Definición de índice	18, 4
Relaciones donde se utilicen orden, raíces primitivas e índice	18, 3, 4, 1
Definición de restos cuadráticos	4, 3
Propiedades de los restos cuadráticos	18, 4, 5
Definición del símbolo de Legendre	18, 4, 1, 3, 5
Propiedades relacionadas con el símbolo de Legendre	18, 3, 4, 1
Números especiales: Fermat, Mersenne, Perfectos	1

<u>Libros utilizados</u>:

Libro 1. Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 19 – 32.

Libro 2. Bellot, F. (2009). El pequeño teorema de Fermat y aplicaciones. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 37. (En soporte electrónico).

Libro 3. Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 74.

Libro 4. Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico).Páginas 61 – 102, 129 – 130, 136 – 141, 147 – 166, 169 – 196.

Libro 5. Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 20 – 21.

Libro 6. Graham, R; Knuth, D. y Patashnik, O. (1989). Concrete Mathematics. (En soporte electrónico). Páginas 123 – 152.

Libro 7. Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 347 – 358.

Libro 8. Larson, L. C. Problem (1983). Solving Through Problems. New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 84 – 113.

Libro 9. Lovász, L., Pelikan, J. y Vesztergombi. K. (1999).Discrete Mathematics. Budapest: Spring. (En soporte electrónico).Páginas 105 – 106, 111 – 114.

Libro 10. Moreira, C. G. (1999). Divisibilidade, congruencia e aritmética módulo n. En revista Eureka 2. (En soporte electrónico). Páginas 43 – 52.

Libro 11. Moser, L. (2007). An Introduction to the Theory of Numbers.Indiana: The Trillia Group. (En soporte electrónico). Páginas 42 – 52.

Libro 12. Muniz Neto, A. (2002). Como Fermat e Bézout podem salvar o dia. En revista Eureka 12. (En soporte electrónico). Páginas 25 – 30.

Libro 13. Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics.Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 265 – 270, 302 – 314.

Libro 14. Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 25.

Libro 15.Sierpinski, W. (1964).Elementary theory of numbers.Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 31 – 32, 63 – 67, 186 – 227, 315 – 333.

Libro 16. Sosa Polma, H. (2001). Equacoes de Recorrencia. En revista Eureka 9. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 40.

Libro 17. Tattersall, J. (1999). Elementary number theory in nine chapters.New York: Cambridge University Press. (En soporte electrónico). Páginas 150 – 209.

Libro 18. Vinográdov, I. (1977). Fundamentos de la Teoría de Números. Moscú: MIR. Páginas 52 – 134.

Libro 19. Vorobiov, N. N. (1984). Lecciones Populares de Matemática: Criterios de Divisibilidad. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Página 28 – 30, 55 – 57.

<u>Definiciones:</u>

<u>Definición de congruencia aritmética</u>:

Libro 18. Página 52.

Libro 13. Página 21.

Libro 7. Página 350.

Libro 3. Página 33. Se asume como definición lo que otros toman como caracterización. (La relación entre la divisibilidad y la diferencia)

Libro 19. Página 28 – 30. Se trata con un nombre que no es usual en Cuba, equirresiduales. Más tarde, en la página 30, se establece la equivalencia entre este término y congruencia.

Libro 10. Página 43. Este autor asume como definición lo que otros toman como caracterización. (La relación entre la divisibilidad y la diferencia)

Libro 4. Página 63. Este autor asume como definición lo que otros toman como caracterización. (La relación entre la divisibilidad y la diferencia)

Libro 1. Página 19.

Libro 9. Página 105.

Libro 8. Páginas 84 – 113.

Libro 6. Página 123.

Libro 5. Páginas 20. Toma como definición lo que otros autores consideran como caracterización (la relación entre la divisibilidad y la diferencia)

Libro 11. Páginas 42.

Libro 15. Páginas 186. Toma como definición lo que otros autores consideran como caracterización (la relación entre la divisibilidad y la diferencia).

<u>Definición de clases residuales módulo n</u>:

Libro 3. Página 39.

Libro 10. Página 43.

<u>Definición de inverso multiplicativo</u>:

Libro 3. Página 41. Proposición 1.32.

Libro 10. Página 44.

<u>Sistema completo de restos</u>:

Libro 18. Páginas 56 – 58. Se ofrecen teoremas importantes y se aborda la definición de sistema reducidos de restos con propiedades importantes.

Libro 3. Página 47. Se define, además, el sistema completo de invertibles.

Libro 10. Página 44. Se aborda además de la definición, la relación entre sistema completo de restos y sistema completo de invertibles módulo n.

Libro 4. Página 64.

Libro 1. Página 24 – 26. se aborda un sistema completo de restos módulo n y el menor de ellos con todos los representantes positivos, se presentan, además, los sistemas completos de restos más utilizados para n par y para n impar. se presentan varios ejemplos instructivos. En la proposición 1.24 se muestra como a partir de sistemas completos de restos se pueden determinar otros. Proposición 1.25.

Libro 17. Páginas 53 – 54. Teorema 2.3, 2,4 (formas que toman o que no pueden tomar los cuadrados de enteros según el módulo 4). Se aborda, además, los sistemas completos de restos módulo 3 y 7.

Definición de orden:

Libro 3. Página 66.

Libro 10. Página 48.

Libro 4. Página 147, definición 8.1.

Libro 1. Página 32. se ofrece a partir de su relación con el teorema de Euler.

Definición de raíces primitivas:

Libro 18. Página 109.

Libro 3. Página 66.

Libro 10. Página 48 – 51. Aquí se ofrecen además algunas propiedades de las raíces primitivas.

Libro 4. Página 150, definición 8.2

Definición de índice:

Libro 18. Página 116.

Libro 4. Página 163, definición 8.3.

Definición de restos cuadráticos:

Libro 4. Página 171, definición 9.1.

Libro 3. Páginas 81 – 82.

Teoremas, procedimientos y relaciones:

Propiedades de las congruencias:

Libro 18. Páginas 52 – 56.

Libro 14. Páginas 24 – 25. Teoremas 135, 152. Se abordan ejemplos instructivos a un nivel elemental y otros interesantes con un mayor nivel de complejidad.

Libro 7. Páginas 350 – 351. Acápites 424 (caracterización), 425 (una congruencia no se altera si se multiplica por un valor entero), 426, 427.

Libro 3. Página 33 – 36. Se ofrecen las propiedades fundamentales con demostración y algunos ejemplos interesantes de aplicación.

Libro 19. Página 28 – 32. Teoremas 19, 20. En el teorema 19 se ofrece la caracterización usual de congruencia con el mismo término utilizado en la definición. En la página 30 se ofrecen otras propiedades de las congruencias. En la propiedad 4 se aborda el sistema completo de restos módulo n, un contenido fundamental en este tema.

Libro 10. Página 43. En las observaciones de la definición menciona las propiedades relacionadas con que la congruencia es una relación de equivalencia. En una proposición siguiente enuncia y demuestra otras propiedades importantes.

Libro 4. Página 64 – 67. Teoremas 4.1 (caracterización), 4.2, 4.3.

Libro 1. Página 19 – 22. se ofrecen, además, algunos ejemplos instructivos de aplicación de las propiedades. Páginas 23 – 24, corolarios 1.20, 1.21, 1.22.

Libro 9. Páginas 105 – 106.

Libro 8. Páginas 91 – 96.

Libro 13. Página 294. Propiedades 1 – 12.

Libro 6. Página 124 – 126.

Libro 11. Página 43.

Libro 15. Páginas 186 – 187.

<u>Teoremas de Fermat, Euler y Wilson</u>:

Libro 18. Páginas 68 (analizan el teorema de Euler y como caso particular el de Fermat), 74 – 75 (teorema de Wilson).

Libro 7. Página 347, en forma de divisibilidad. En la página 351, acápite 428 se da en forma de congruencias.

Páginas 354 – 356, acápites 433, 434, 435. Tener en cuenta que se utiliza otra notación de factorial.

Libro 3. Páginas 42 – 45. Teorema 1.34 (Wilson) y se utiliza para demostrar el teorema 1.35 (Wolstenholme) y para obtener resultados interesantes sobre coeficientes binomiales, se ofrecen, además, algunos ejemplos interesantes. Páginas 48 – 51, teoremas 1.40, 1.41, con aplicaciones en ejemplos y en la proposición 1.43.

Libro 12. Páginas 26. Teorema 2 (Fermat). Se resuelven, además, algunos problemas de aplicación.

Libro 17. Página 55 – 57. Teoremas 24

Libro 10. Página 45. Se aborda el teorema de Euler y como colorario el pequeño teorema de Fermat.

Libro 4. Páginas 88 – 90. Teoremas 5.1 (pequeño teorema de Fermat), Páginas 94 – 96. Teoremas 5.4 (teorema de Wilson), Páginas 137 – 140. Teoremas 5.4 (teorema de Euler). Se ofrecen dos demostraciones del teorema de Euler.

Libro 1. Página 26. Teorema 1.26 (Wilson), se analiza, además, que el recíproco de este teorema es verdadero. Páginas 28 – 32. Teoremas 1.28 (Euler), 1.29 (Pequeño teorema de Fermat), se ofrecen ejemplos instructivo de aplicación de estos teoremas.

Libro 2. Obtiene el teorema de Fermat a partir del análisis de casos particulares y después ofrece interesantes problemas de aplicación.

Libro 5. Páginas 20 – 21. Teoremas 2.120, 2.121, 2.123.

<u>Ecuaciones y sistemas en congruencias</u>:

Libro 18. Páginas 68 – 78 (analiza definiciones como: congruencias equivalentes y sistemas de congruencias de primer grado, ofrece un procedimiento para resolver ecuaciones de primer grado utilizando fracciones continuas y aborda otras propiedades importantes de las congruencias de primer grado).

Libro 4. Página 76 – 79, 81 – 82. Teorema 4. 7, 4.9. Se proponen además algunos ejemplos de cómo resolver ecuaciones y sistemas en recurrencias.

Libro 9. Páginas 111 – 114. Teorema 6.3.1.

Libro 16. Páginas 33 – 40. Se ofrecen procedimientos de solución de ecuaciones de recurrencia a un nivel avanzado.

Libro 3. Páginas 75 – 76. Proposición 2.1 (relación necesaria y suficiente para que una ecuación lineal de recurrencias tenga soluciones). Página 90, proposición 2.14 (una propiedad fundamental, la equivalencia entre la resolución de una ecuación y la de un sistema de congruencias).

Teorema de los restos chinos:

Libro 4. Página 79 – 81. Teorema 4.8. Se ofrece una forma sencilla de enunciar y demostrar este teorema y se resuelven algunos ejemplos de aplicación.

Libro 3. Página 76 – 80. Teorema 2.2. Se ofrecen, además, lema 2.5 y algunos ejemplos de aplicación, donde aparecen definiciones importantes como: enteros libres de cuadrados y potencia no trivial.

Libro 8. Página 100.

Libro 10. Página 46. El enunciado está relacionado con biyecciones, es por ello que no es muy comprensible para un principiante, es recomendable ver primero el tratamiento en otros materiales.

Libro 5. Páginas 20. Teorema 2.119.

Procedimiento para buscar últimas cifras de un número por medio de la congruencia:

Libro 3. Página 38, ejemplo 1.30.

Libro 8. Páginas 92 – 93. En los ejemplos 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 se muestra como utilizar la congruencia para determinar la última, las dos últimas y las tres últimas cifras de un número, respectivamente.

Relaciones donde se utiliza el orden, las raíces primitivas o los índices módulo n:

Libro 18. Páginas 109 – 123. Establece relaciones para determinar la existencia de raíces primitivas, respecto a los módulos un número primo, potencia de un número primo o duplo de esta potencia y cómo determinar las raíces primitivas en estos dos últimos casos. Trabaja ejemplos interesantes de cómo trabajar con índices.

Libro 3. Páginas 66 – 72. Proposición 1. 64, 1. 69, 1.72, 1.73, 1.74, 1.75, 1.76, 1.79, corolario 1.65, 1.70, 1.80, teorema 1. 71, proposiciones lemas 1.77, 1.78. Se ofrecen relaciones y ejemplos muy importantes.

Libro 4. Páginas 148 – 150, teoremas 8.1, 8.2, 8.3, con sus respectivos corolarios. Páginas 150 – 151, teorema 8.4 y colorario. Páginas 152 – 162, teoremas 8.5 (Lagrage), 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10 y sus colorarios y lemas. Páginas 164 – 180, teoremas 8.11, 8.12, con sus colorarios. Estos elementos son de nivel avanzado.

Libro 1. Página 32. Proposición 1.30.

Propiedades relacionadas con los restos cuadráticos:

Libro 18. Páginas 85 – 87 (ofrece relaciones importantes, incluyendo la que se presenta entre los restos cuadráticos y el sistema reducido de restos).

Libro 4. Páginas 171 – 173, teoremas 9.1 (criterio de Euler) con colorario.

Libro 5. Páginas 21. Teorema 2.124 (existencia de raíces primitivas)

Teoría Complementaria relacionada:

Símbolo de Legendre:

Definición:

Libro 18. Página 87.

Libro 4. Páginas 191 – 192.

Libro 1. Página 65.

Libro 3. Páginas 82.

Libro 5. Páginas 21 – 22. Definición 2.131.

Propiedades y relaciones:

Libro 18. Páginas 87 – 92.

Libro 3. Páginas 82 – 88. Se ofrece proposición 2.7 (criterio de Euler), corolario 2.8 (propiedades del símbolo de Legendre), teorema 2.10 (ley de reciprocidad cuadrática), lema 2.13 (Gauss).

Libro 4. Páginas 176 – 184, teoremas 9.2, 9.3, 9.4, 9.5 (Lema de Gauss), 9.6, 9.7, 9.8, con sus lemas y colorarios.

Libro 1. Páginas 65 – 70. Proposición 1.49. Se proponen ejemplos interesantes, pero a un nivel avanzado.

Números de Fermat, Mersenne y Números perfectos:

Libro 1. Páginas 70 - 71. Se ofrecen ejemplos interesantes a un nivel avanzado. Páginas 71 - 72. Se ofrecen ejemplos interesantes a un nivel avanzado. Páginas 72 - 74. Teoremas 1.51 (condición necesaria y suficiente para que un entero par sea perfecto), 1.52 (descomposición canónica de un número perfecto impar). Se ofrecen ejemplos interesantes a un nivel avanzado.

Mapa de conocimientos explícitos de Ecuaciones en Enteros:

	Libros
Definición de ecuación en enteros	8
Ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$	2, 4, 1, 6, 9, 8
Método para resolverlas: factorización	2
Método para resolverlas: utilizar desigualdades	2
Método para resolverlas: paramétrico	2
Método para resolverlas: aritmética modular	2
Método para resolverlas: inducción matemática	2
Método para resolverlas: descenso infinito	2
Definición de ternas pitagóricas	2, 5, 6, 7, 8
Resolución utilizando ternas pitagóricas	2, 5, 6, 9, 10, 7,
Definición de ecuación de Fermat	2, 7, 8
Resolución de ecuaciones de Fermat	2, 5, 6, 9, 7, 8
Definición de ecuación de Pell:	5, 7, 8
Resolución de ecuaciones de Pell y otras relacionadas	2, 5, 6, 9, 7, 8
Ecuaciones exponenciales en enteros (con dos o tres variables)	3

Libro 1. Andreescu, T., Andrica, D. y Feng, Z.(2007). 104 Number Theory. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 38 – 39.

Libro 2. Andreescu, T. y Andrica, D. (2002). An Introduction to Diophantine Equations.(En soporte electrónico).

Libro 3. Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 83 – 85, 94 – 98.

Libro 4.Baldor, A. (s.a). Álgebra Elemental. (En soporte electrónico). Páginas 122 – 127, 311 – 318.

Libro 5. Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N. y Tenga, E. (2010). Teoria dos números. (En soporte electrónico). Páginas 120 – 167.

Libro 6.Burton, D. (2007). Elementary Number Theory Sixth Edition.Boston: McGraw-Hill. (En soporte electrónico). Páginas 32 – 37, 245 – 260, 334 - 348.

Libro 7.Muniz Neto, A. (2000). Equacones Diofantinas. En revista Eureka 7. (En soporte electrónico). Páginas 39 – 48.

Libro 8.Rosen, K. (Ed.) (1999). Handbook of discrete and combinatorial Mathemaics. Florida: Ed. CRC Press. (En soporte electrónico). Páginas 315 – 323.

Libro 9. Sierpinski, W. (1964). Elementary theory of numbers. Warszawa. (En soporte electrónico). Páginas 27 – 31, 35 – 63, 67 – 84, 88 – 109.

Libro 10. Tattersall, J. (1999). Elementary number theory in nine chapters.New York: Cambridge University Press. (En soporte electrónico). Páginas 70 – 71.

<u>Definición de ecuación en enteros</u>:

Libro 8. Página 315.

<u>Definición de terna pitagórica</u>:

Libro 2. Página 67 – 68.

Libro 5. Página 120.

Libro 6. Página 246.

Libro 7. Página 40.

Libro 8. Página 316.

Definición de ecuación de Fermat:

Libro 2. Página 93.

Libro 7. Página 42.

Libro 8. Página 318.

Definición de ecuación de Pell:

Libro 5. Páginas 151.

Libro 7.Página 44. Definición 1.

Libro 8. Páginas 319.

Métodos para resolver ecuaciones en enteros:

Método de factorización:

Libro 2. Páginas 9 – 14. Se ofrece el método y se presentan 5 ejemplos interesantes de aplicación.

Método de utilizar desigualdades:

Libro 2. Páginas 15 – 18. Se ofrece el método y se presentan 5 ejemplos interesantes de aplicación.

Método paramétrico:

Libro 2. Páginas 20 – 25. Se ofrece el método y se presentan 5 ejemplos interesantes de aplicación.

Método de aritmética modular:

Libro 2. Páginas 27 – 30. Se ofrece el método y se presentan 5 ejemplos interesantes de aplicación.

Método de inducción matemática:

Libro 2. Páginas 32 – 40. Se ofrece el método, con tres formas de utilizar la inducción matemática y se presentan 5 ejemplos interesantes de aplicación.

Método de descenso infinito:

Libro 2. Páginas 42 – 50. Se ofrece el método y se presentan 5 ejemplos interesantes de aplicación. Se trata también el método de descenso finito y dos variantes del método de descenso infinito.

Tipos de ecuaciones:

Ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$:

Libro 2. Páginas 59 – 65. Se generaliza la solución de ecuaciones lineales. En el teorema 2.1.1 se ofrece la condición necesaria y suficiente para que una ecuación lineal sea soluble. En el corolario 2.1.2 se ofrece la solución general de una ecuación lineal con dos variables. En el teorema 2.1.3 aparece la función generatriz de la cantidad de soluciones de una ecuación lineal con n variables.

Libro 4. Páginas 311 – 314.

Libro 1. Página 38. Teorema 1.39 (condición necesaria para que sea soluble en enteros). Corolario 1.40 (solución general de una ecuación en dos variables), se ofrecen, además, ejemplos de resolución de ecuaciones en tres variables.

Libro 6. Páginas 32 – 37. Teorema 2.9 (condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones); corolario (forma general de las soluciones).

Libro 9. Páginas 10. Teorema 1

Libro 8. Páginas 315 – 316.

Ternas pitagóricas:

Libro 2. Páginas 67 – 85. Teorema 2.2.1 (forma de las soluciones enteras positivas de esta ecuación); corolario 2.2.2 (forma general de todas las soluciones); teorema 2.2.3 (forma general de las soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$). En las páginas 71 y 72 se ofrecen las soluciones de la ecuación pitagórica general y se presentan 3 ejemplos de aplicación. Teorema 2.3.1 (solución general de la ecuación $x^2 + axy + y^2 = z^2$; teorema 2.3.2 (soluciones de la ecuación $x^4 + x^2y^2 + y^4 = z^2$); teorema 2.3.3 (solución de la ecuación $x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2$); teorema 2.3.4 (solución de la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$)

Libro 5. Páginas 120 – 140. Proposición 4.1 (ternas pitagóricas primitivas); teorema 4.4 (Legendre, condición necesaria y suficiente para que la ecuación $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ tenga soluciones no nulas); teorema 4.6 (números que pueden ser expresados como la suma de dos cuadrados); lemas 4.10, 4.11; teorema 4.12; teorema 4.15 (teorema de los tres cuadrados de Gauss); teoremas 4.19, 4.20 (relaciones de números primos con sumas de cuadrados).

Libro 6. Páginas 245 – 250. Lema 1 (condiciones de la paridad de las variables); teorema 12.1 (soluciones generales). Páginas 265 – 279. Teorema 13.2 (Fermat, condición necesaria y suficiente para que un número primo se pueda expresar como la suma de dos cuadrados); teorema 13.3 (condición necesaria y suficiente para que un número primo se pueda expresar como la suma de 2 cuadrados); teorema 13.5 (números que no pueden ser representados como la suma de 3 cuadrados); teorema 13.6 (números primos escritos como la suma de 4 cuadrados); teorema 13.7 (Lagrange, números escritos como la suma de 4 cuadrados)

Libro 9. Páginas 38 – 48. (se realiza un análisis completo de esta ecuación y sus soluciones enteras). Se debe analizar el teorema 3 de la página 52 (no existen cuadrados de modo que su suma y diferencia sean cuadrados). Analizar corolario 1 página 54 (no existen números naturales a, b, c tales que $a^4 - b^4 = c^2$). Página 58, análisis de la ecuación $a^4 + b^4 = c^2$, demostrando por contradicción que no tiene soluciones naturales, utilizando contradicción y la resolución de la ecuación pitagórica.

Libro 10. Páginas 70 – 71.

Libro 7. Páginas 39 – 41. Teorema 1

Libro 8. Páginas 317 – 318.

<u>Ecuaciones exponenciales en enteros (con dos o tres variables)</u>:

Libro 3. Páginas 83 – 85.

<u>Resolución de ecuaciones de Fermat</u>:

Libro 2. Páginas 85 – 99. Teorema 2.3.4 (solución de la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$); corolario 2.3.5 (solución de la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$); teorema 2.3.6 (solución de la ecuación $x^2 + 3y^2 = n$); lema 2.3.7 (solución de la ecuación $x^2 + 3y^2 = z^3$); teorema 2.3.8 (solución de la ecuación $x^3 + y^3 = z^3$); ejemplo 4 (solución de la ecuación de la forma $x^4 - y^4 = z^2$).

Libro 5. Páginas 140 – 149. Método de descenso infinito de Fermat; ejemplo 4.21 (Fermat, solución de la ecuación de la forma $x^4 + y^4 = z^2$); lema 4.24 (solución general de la ecuación $s^3 = a^2 + 3b^2$); ejemplo 4.25

Libro 6. Páginas 252 – 257. Teorema 12.3 (Fermat, solución de la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$); corolario (solución de la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$); teorema 12.4 (Fermat, solución de la ecuación $x^4 - y^4 = z^2$);

Libro 9. Páginas 78 – 79. Se resuelve la ecuación de la forma $x^3 + y^3 = 2z^3$.

Libro 7. Páginas 41 – 43. Se ofrece como ejemplolaresolución de laecuación $3x^2 + y^2 = 2z^2$, que permite obtener un método que sirve para demostrar que ecuaciones en enteros no tienen soluciones distintas de las triviales, que aparece en la página 42.

Libro 8. Páginas 318 – 319.

Resolución de ecuaciones de Pell y otras relacionadas:

Libro 2. Páginas 106 – 120. Teorema 3.2.1 (soluciones de la ecuación de Pell); en la página 114 ecuación de la forma $ax^2 - by^2 = 1$; proposición 3.3.1 (condiciones para que la ecuación anterior no tenga soluciones enteras); teorema 3.3.2 (solución general de la ecuación anterior); teorema 3.4.1 (solución general de la ecuación $x^2 - dy^2 = -1$); teorema 3.4.2 (condición para que la ecuación $x^2 - dy^2 = -1$ sea soluble).

Libro 5. Páginas 151 – 166. Teorema 4.26 (existencia de soluciones de la ecuación de Pell); teorema 4.27 (Ko Chao, soluciones de la ecuación $x^2 - y^p = 1$, p primo ($p \geq 5$); teorema 4.28 (análisis de las soluciones de la ecuación $x^2 - Ay^2 = -1$); proposición 4.29 (Dirichlet, condiciones para la existencia de soluciones de la ecuación $x^2 - Ay^2 = -1$); teorema 4.30 (Nagell-Trotter, condiciones para la existencia de soluciones de la ecuación $x^2 - Ay^2 = -1$), Proposición 4.31 (soluciones de la ecuación $x^2 - Ny^2 = c$); teorema 4.32, corolario 4.33 (soluciones de la ecuación $mx^2 - ny^2 = \pm 1$).

Libro 6. Páginas 334 – 346. Teoremas 15.10 – 15.13 (relaciones de la ecuación de Pell y las fracciones continuas); teorema 15.14 – 15.15 (soluciones generales).

Libro 9. Páginas 88 – 99. Se realiza un análisis general de esta ecuación.

Libro 7. Páginas 45 – 47. Teorema 3 (soluciones de las ecuaciones de Pell). Lema 2 (soluciones de laecuación $x^2 - Ny^2 = \pm a$)

Libro 8. Páginas 319 – 322.

Álgebra:

Mapa de conocimientos explícitos de Polinomios:	Libros
Definición de polinomio	5, 12, 7
Operaciones con polinomios	9, 5, 7
Definición de raíz de un polinomio	9
Teorema sobre la raíz irracional de polinomios con coeficientesracionales	9
Definición y notaciones de número complejo	9, 11, 1, 10, 7
Definición de conjugado de un número complejo	1, 4, 9, 10
Definición de módulo de un número complejo	1, 4, 9
Operaciones básicas con números complejos	4, 1, 10
Teorema fundamental del álgebra	9, 5, 7, 6
Teorema del resto o de Bezout	9, 5, 7, 2, 6
Teoremas sobre factorización de polinomios	5, 7, 11, 2
Teorema de la raíz racional	11, 6
Relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuaciónpolinómica (teorema de Vieta)	9, 12, 5, 7, 3, 6
Regla de los signos de Descartes:	9
Método de los coeficientes indeterminados	9, 5, 11
Teorema sobre la raíz irracional de polinomios con coeficientesracionales	9
Potencias de un número complejo y teorema de Moivre	1, 10, 11
Relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuaciónpolinómica (teorema de Newton):	5, 8, 7, 6
Teorema sobre la raíz imaginaria de polinomios con coeficientes reales	9, 5
Raíces n – ésimas de la unidad	9, 7, 1
Demostración de identidades algebraicas	9, 7
Polinomios irreducibles	10, 5, 6

Libros:

Libro 1. Andreescu, T. and Andrica, D. (2004). ComplexNumberfrom A to Z. (En soporte electrónico).

Libro 2.Baldor, A. (s.a). Álgebra Elemental. (En soporte electrónico). Páginas 112 – 121.

Libro 3.Bellot, F. (2006). Problemas cuadráticos de olimpiadas. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 22. (En soporte electrónico).

Libro 4.Bulajich, R., J. A. Gómez y R. Valdez. (2005). Desigualdades. México: Cuaderno de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico).

Libro 5.Djukic, D. (2007). Polynomials in One Variable.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com.(En soporte electrónico).

Libro 6.Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 5 – 6.

Libro 7.Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 245 – 269.

Libro 8.Gomes, C. (2007). Polinomios Simétricos. En revista Eureka 25. (En soporte electrónico). Páginas 46 – 52.

Libro 9.Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 80 – 116, 164 – 208, 301 – 317 y 517 – 587.

Libro 10.Kalnin, R. A. (1978). Álgebra y Funciones Elementales. Moscú: MIR. Páginas 372 – 400.

Libro 11.Larson, L. C. (1983). Problem - Solving Through Problems.New York: Springer-Verlag. (En soporte electrónico). Páginas 114 – 119.

Libro 12.Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 68 – 74.

Definiciones:

Definición de polinomio:

Libro 5. Página 1. Se ofrecen ejemplos de expresiones que son polinomios y de otras que no lo son.

Libro 12. Páginas 68.

Libro 7. Página 249.

Definición de raíz de un polinomio:

Libro 9. Página 543, artículo 536.

Definición y notaciones de número complejo:

Libro 9. Páginas 90 – 91, artículos 96 – 99 (se utiliza una notación que en la actualidad no es utilizada, para la unidad imaginaria utilizan $\sqrt{-1}$).

Libro 11. Páginas 114 – 115. Se ofrecen las tres notaciones fundamentales de un número complejo: binómica, trigonométrica y exponencial. Página 127 (definición).

Libro 1. Página 2. Página 5, proposición (forma algebraica o binómica). Página 29 (forma trigonométrica).

Libro 10. Página 372 (definición y forma binómica). Páginas 282 – 284 (forma trigonométrica). Páginas 391 – 394 (forma exponencial).

Libro 7. Páginas 247, punto 9 (notación exponencial y trigonométrica).

Definición de conjugado de un número complejo:

Libro 1. Páginas 8 – 9, se presentan, además, propiedades importantes relacionadas con el conjugado de un número complejo.

Libro 4. Página 4. Ejercicio 1.7.

Libro 9. Página 91, artículos 100 – 101 (se ofrecen algunas propiedades de los números complejos conjugados).

Libro 10. Página 374.

Definición de módulo de un número complejo:

Libro 1. Página 9 – 14, se ofrecen, además, propiedades del módulo de un número complejo y se resuelven problemas interesantes.

Libro 4. Página 4. Ejercicio 1.7.

Libro 9. Página 92, artículos 102 – 103 (se ofrecen algunas propiedades del módulo de números complejos).

Teoremas, procedimientos y relaciones:

Operaciones con polinomios:

Libro 9. Páginas 522 – 523, artículos 516 – 517 (se ofrece el método de división sintética para dos polinomios).

Libro 5. Páginas 1 – 2, teoremas 1 y 2 (en este último se ofrece la división con resto de polinomios).

Libro 7. Páginas 245 (división con resto de dos polinomios).

Teorema del resto o de Bezout:

Libro 9. Página 300, artículo 309. Página 520, artículo 514.

Libro 5. Página 2, teorema 3.

Libro 7. Páginas 245 – 246, punto 3.

Libro 2. Páginas 113 – 114.

Libro 6. Página 6, teorema 2.4.

Teoremas sobre factorización de polinomios:

Libro 5. Páginas 2 – 3, teorema 4 (se ofrece una relación importante los ceros del divisor son también ceros del dividendo), teorema 5 (representación del polinomio cómo producto de factores), teorema 7 (condición para que un polinomio sea divisible por un producto de dos polinomios). Teorema 9 (factorización única). Página 7, teorema 22 (de Rolle, entre dos ceros de un polinomio P(x) existe un cero de P'(x), con el corolario, si todos los ceros de P(x) son reales, también lo son los de P'(x))

Libro 7. Páginas 245 – 246. puntos 3 – 4 (factorización y multiplicidad de los factores).

Libro 11. Páginas 125 – 119 (se ofrece el algoritmo de división y el teorema de factorización). Página 131 (Lema de Gauss).

Libro 2. Páginas 118 – 121.

<u>Teorema de la raíz racional</u>:

Libro 11. Página 131.

Libro 6. Página 6, teorema 2.5.

<u>Método de los coeficientes indeterminados</u>:

Libro 9. Páginas 300 – 308, artículos 309 – 313 (se ofrecen ejemplos como: determinar el término general de una suma de n elementos, determinar divisibilidad de polinomios, expresar una fracción como suma de fracciones parciales). Páginas 520 – 522, artículo 515 (determinación del cociente y el resto de la división de dos polinomios).

Libro 5. Página 4, corolario del teorema 5 (igualdad de polinomios). En el teorema 4 se ofrece además una relación importante los ceros del divisor son también ceros del dividendo.

Libro 11. Página 133 – 141, teorema de identidad, que es la base del método de los coeficientes indeterminados, se ofrecen además, ejemplos, interesantes.

<u>Relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica (teorema de Vieta)</u>:

Libro 9. Páginas 100 – 107, artículos 111 – 118 (se comienza por el análisis de las soluciones de una ecuación cuadrática según su discriminante y se presenta el teorema de Vieta para una ecuación cuadrática). Páginas 544 – 549, artículos 539 – 542 (generalización con ejemplos).

Libro 12. Páginas 72 – 73.

Libro 5. Página 5, definición 1 (polinomios simétricos elementales), teorema 11 (se demuestra utilizando inducción sobre el grado del polinomio).

Libro 7. Páginas 246 – 247, punto 6 (teorema de Vieta).

Libro 3. Se presenta para polinomios de segundo grado y se proponen problemas interesantes.

Libro 6. Página 6, teorema 2.10.

<u>Teorema sobre la raíz irracional de polinomios con coeficientes racionales</u>:

Libro 9. Páginas 551 – 552, artículo 545.

<u>Teorema fundamental del álgebra</u>:

Libro 9. Página 544, artículo 538.

Libro 5. Página 6 (una consecuencia del teorema fundamental, que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces).

Libro 7. Páginas 247, punto 8 (teorema fundamental).

Libro 6. Página 6, teorema 2.6.

Operaciones básicas con números complejos:

Libro 4. Página 4. Ejercicio 1.7. (Relaciones importantes del conjugado y del módulo de un número complejo).

Libro 1. Páginas 6 – 7 (operaciones fundamentales con números complejos en forma binómica). Páginas 36 – 39 (operaciones en forma trigonométrica).

Libro 10. Páginas 375 – 379 (en notación binómica). Páginas 384 – 386 (en forma trigonométrica).

Potencias de un número complejo y teorema de Moivre:

Libro 1. Página 7 (potencias de la unidad imaginaria). Páginas 37 – 38 (teorema de Moivre).

Libro 10. Páginas 379 – 380 (potencias de la unidad imaginaria y de un número complejo). Páginas 386 – 387 (teorema de Moivre).

Libro 11. Páginas 116 (teorema de Moivre).

Raíces n – ésimas de la unidad:

Libro 9. Páginas 94 – 97, artículos 106 – 110 (se comienza a utilizar la i como unidad imaginaria, se trabajan las raíces cúbicas de la unidad y ejemplos interesantes con ellas).

Libro 7. Páginas 247, punto 9.

Libro 1. Páginas 41 – 51.

Demostración de identidades algebraicas:

Libro 9. Páginas 526 – 528, artículo 522 (se ofrecen ejemplos de demostración de identidades). Páginas 530 – 533, artículos 524 – 525.

Libro 7. Páginas 247 – 250.

<u>Teorema sobre la raíz imaginaria de polinomios con coeficientes reales</u>:

Libro 9. Páginas 550 – 551, artículo 543 – 544.

Libro 5. Páginas 3 – 4, teorema 8.

<u>Regla de los signos de Descartes</u>:

Libro 9. Páginas 553 – 554, artículo 547.

<u>Relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica (teorema de Newton)</u>:

Libro 5. Páginas 13 – 15, definición 2 (polinomio simétrico), teoremas 23 – 24 (todos los polinomios pueden ser expresados como combinación de polinomios simétricos básicos), teorema 25 (polinomios simétricos de Newton).

Libro 8. Páginas 46 – 52. Se resuelven problemas utilizando polinomios simétricos y las relaciones de Newton.

Libro 7. Páginas 251 – 254. (se trabajan problemas con polinomios simétricos y las relaciones de Newton).

Libro 6. Página 6, teorema 2.11.

<u>Polinomios irreducibles</u>:

Libro 10. Páginas 374.

Libro 5. Páginas 8 – 10, teorema 16 (lema de Gauss), teorema 17 (Criterio extendido de Eisenstein).

Libro 6. Página 6, teorema 2.7 (Criterio extendido de Eisenstein).

Mapa de conocimientos explícitos de Desigualdades:

Tema	Libros
Definición de desigualdad	7, 11
Relación de orden de los números reales	5
Propiedades de las relaciones de desigualdad	5, 7, 14
Desigualdad $x^2 \geq 0$	14, 5, 7, 1, 12
Desigualdad triangular	5, 14
Determinar mínimo y máximo de una función cuadrática	5
Determinación del máximo de un producto de valores con suma constante y del mínimo de una suma con producto constante	5, 7
Desigualdad entre las medias aritmética, geométrica, armónica y potenciales y potencias m-ésimas de n números	5, 7, 13, 10, 6, 14, 8, 12
Teorema de reacomodo	5, 14, 6
Generalización de la desigualdad de reacomodo	6
Desigualdad de Cauchy – Schwartz	5, 3, 13, 6, 14, 10, 9
Desigualdad de Cauchy – Schwartz en forma de Engel o principio del mínimo de ArturEngel	5, 14
Desigualdad de Nesbitt	5, 6, 10, 14
Desigualdad de Tchebychev	5, 6, 13, 14, 12
Definición de función convexa y función cóncava	5, 13, 10, 12
Desigualdad de Jensen	5, 13, 10, 12
Desigualdad de Hölder	5, 10, 12
Desigualdad de Schür	5, 10, 12
Teorema de Muirhead	2, 5, 10, 12
Desigualdades utilizando sustituciones	4, 16, 15
Sistematización	17, 19, 18, 11

Libros utilizados:

Libro 1. Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 40 – 43.

Libro 2. Bellot, F. (2010). El teorema de Muirhead y aplicaciones a problemas de Olimpiadas. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 40. (En soporte electrónico).

Libro 3. Bellot, F. (2012). Sobre la desigualdad de Cauchy (Un enfoque heurístico y algunas aplicaciones). En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 44. (En soporte electrónico).

Libro 4.Boreico, L. y Teleuca, M. (2006). An original method of proving inequalities. En revista Mathematical Reflexión 3. (En soporte electrónico).

Libro 5. Bulajich, R., J. A. Gómez y R. Valdez. (2005). Desigualdades. México: Cuaderno de Olimpiadas de Matemática. (En soporte electrónico).

Libro 6.Engel, A. (1997). Problem-solving strategies. New York: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 161 – 204.

Libro 7. Hall, H. S. y Knight, B. A. (1948). Álgebra Superior. México: Editorial Hispano-Americana, 1948. (En soporte electrónico). Páginas 247 – 260.

Libro 8.Kim Hung, P. (2007). On the AM-GM Inequality. En revista Mathematical Reflexión 4. (En soporte electrónico).

Libro 9. Lee, H. (2005). Topics in Inequalities.(En soporte electrónico).

Libro 10.Lee, H. (2007). Topics in Inequalities – Theorems and Techniques.(En soporte electrónico).

Libro 11. Litvinenko, V. y Morkovich, A. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 39, 231 - 238.

Libro 12.Matic, I. (2007). Classical Inequalities.The IMO Compendium Group.Olympiad Training Materials.www.imo.org.yu and www.imocompendium.com. (En soporte electrónico).

Libro 13. Muniz Neto, A. (1999). Desigualdades Elementares. En revista Eureka 5. (En soporte electrónico). Páginas 34 – 49.

Libro 14. Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 75 – 97.

Libro 15. Tajra Fonteles, R. (2002). Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpiadas. En revista Eureka 11. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 33.

Libro 16. Verdiyan, V. y Campos Salas. D. (2007).Simple trigonometric substitutions with broad results.En revista Mathematical Reflexión 6. (En soporte electrónico).

Para la sistematización:

Libro 17. Ba Can, V. y Pohoata, C. (2008). Old and New Inequalities.(En soporte electrónico).Se ofrecen problemas resueltos aplicando las desigualdades estudiadas.

Libro 18.Huu Duc, P. (2008). An unexpectedly useful inequality. En revista Mathematical Reflexión 3. (En soporte electrónico). Se ofrecen desigualdades interesantes donde en sus demostraciones se utilizan elementos estudiados.

Libro 19.Van Thuan, P. y Van Hung, T. (2006). Proving inequalities using linear functions. Se ofrecen ejemplos de como utilizar la función lineal para demostrar desigualdades.

Definiciones:

Definición de desigualdad:

Libro 7. Página 247. Artículo 245.

Libro 11. Páginas 33 – 39. Ofrece, además, ejemplos de cómo utilizar la definición en función de demostrar desigualdades.

Definición de función convexa y cóncava:

Libro 5. Página 25. Se ofrece la desigualdad que representa a la función convexa. Páginas 27 – 28, relación de la función convexa con la continuidad. Páginas 28, se define la función cóncava como el opuesto de una función convexa, en la observación 1.5.4 se ofrece la desigualdad que representa a la función cóncava. Página 29, criterio 1.5.6 se ofrece la relación entre la convexidad y la monotonía. Páginas 30 – 31, se ofrece la interpretación geométrica de convexidad, por medio del área de un triángulo con vértices en la gráfica de la función.

Libro 13. Página 41 – 43, definición 2, proposición 5.

Libro 10. Página 43, definición 4.1.1.

Libro 12. Páginas 4 – 5, definición 3, en los teoremas 4 – 6 se ofrecen algunas relaciones con la función convexa.

<u>Teoremas, procedimientos y relaciones:</u>

<u>Relación de orden de los números reales</u>:

Libro 5. Página 1. Propiedad 1.1.1 (todo número real es mayor, menor o igual que cero. Página 2.

<u>Propiedades de las relaciones de desigualdad</u>:

Libro 5. Página 2. Propiedades 1.1.2 y 1.1.3 (Si dos números son positivos su suma y su producto también lo son.

Libro 7. Páginas 247 – 248. Artículos 246 – 249.

Libro 14. Página 75.

<u>Desigualdad $x^2 \geq 0$</u>:

Libro 14. Página 80 (se realiza una demostración de esta desigualdad).

Libro 5. Páginas 5 – 6.

Libro 7. Página 248. Artículo 250.

Libro 1. Páginas 40 – 43. Se resuelven ejercicios interesantes utilizando esta desigualdad.

Libro 12. Página 1.

<u>Desigualdad triangular</u>:

Libro 5. Página 5 (se plantea que se trata de una desigualdad muy útil).

Libro 14. Páginas 77 – 78 (ver teorema y corolarios).

<u>Procedimiento para determinar mínimo y máximo de una función cuadrática</u>:

Libro 5. Páginas 5 – 6. Epígrafe 1.2. (Condición para que una función cuadrática tenga máximo o mínimo y cómo determinarlo, se ofrecen ejemplos interesantes, en el 1.2.3 se demuestra que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ y en el 1.2.4 se generaliza a $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$).

Determinación del máximo de un producto de valores con suma constante y del mínimo de una suma con producto constante:

Libro 5. Página 4. Ejemplo 1.2.1.

Libro 7. Páginas 250 – 253. Artículos 252 – 256 (se generaliza al trabajo con potencias).

Desigualdad entre las medias aritmética, geométrica, armónica y potencial. Potencias m-ésimas de n números:

Libro 5. Página 8 (se ofrece la desigualdad entre dos elementos y se demuestra utilizando que $x^2 \geq 0$). Páginas 8 – 9 se ofrece una demostración geométrica de esta desigualdad. Página 10 – 11 (se generaliza esta desigualdad, y se ofrece la demostración dada por Cauchy, utilizando una inducción completa de una forma diferente a la utilizada en la mayoría de las bibliografías, que consiste en demostrar que una proposición es verdadera si se verifican tres condiciones, cumplirse para un elemento inicial, que si se cumple para un elemento de orden n se cumple para el anterior y para su doble). En todos los casos se ofrecen ejemplos y ejercicios interesantes. Página 21, ejemplo 1.4.10 (se ofrece una demostración utilizando la desigualdad de reacomodo). Página 23, ejercicio 1.68 (entre media cuadrática y aritmética). Página 41, ejemplo 1.6.3 se demuestra la desigualdad entre media cuadrática y aritmética utilizando principio del mínimo de Artur Engel. Página 49, se demuestra utilizando el teorema de Muirhead.

Libro 7. Páginas 248 – 249. Artículos 250 – 251 (entre dos elementos y se proponen ejemplos). Página 251, artículo 253 (generalización de esta desigualdad). Páginas 254 – 258, artículos 257 – 261 (se ofrece una desigualdad importante que relaciona la media aritmética de potencias m-ésimas y la potencia m-ésima de la media aritmética de los valores).

Libro 13. Páginas 35 – 38, proposición 2. Página 39, corolario 3.1 (entre media cuadrática y aritmética).

Libro 10. Páginas 45 – 46, teoremas 4.2.1 y 4.2.2.

Libro 6. Páginas 168, se demuestra utilizando desigualdad de reacomodo.

Libro 14. Páginas 80 – 82. Teoremas 446 – 447. Páginas 85 – 89, teorema 482, corolarios 488 – 489 (se ofrece la generalización de esta desigualdad).

Libro 8. Se demuestran desigualdades interesantes a partir de la función $G(a,b,c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq 0$, por la desigualdad MA-MG.

Libro 12. Páginas 1 – 3. Páginas 3 – 4, teorema 3.

<u>Desigualdad de Cauchy – Schwarzt</u>:

Libro 5. Página 23, ejercicio 1.70. Página 33 se analiza como un caso particular de la desigualdad de Hölder. Página 40 se ofrece otra demostración utilizando principio del mínimo de Artur Engel.

Libro 3. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 44. (En soporte electrónico). Ofrece una demostración utilizando la identidad de Lagrange y lo enuncia como teorema de Cauchy.

Libro 13. Páginas 38 – 39, proposición 3 (como en otras bibliografías se le nombra desigualdad de Cauchy).

Libro 6. Páginas 167 – 168, se ofrece una notación vectorial de esta desigualdad.

Libro 14. Páginas 90 – 93, teorema 503 (aparece con el nombre de desigualdad de Cauchy-Schwarzt-Bunyakovsky).

Libro 10. Páginas 38 – 41, teorema 3.4.1

Libro 9. Página 39, teorema 14.

<u>Desigualdad de Cauchy – Schwarzt en forma de Engel o principio del mínimo de Artur Engel</u>:

Libro 5. Páginas 39 – 40, teorema 1.6.1, se plantea que es una desigualdad útil, con lo cual se concuerda, pues resuelve múltiples problemas de olimpiadas. Página 40, se generaliza esta desigualdad.

Libro 14. Páginas 83, teorema 555, corolario 456.

<u>Desigualdad de Nesbitt</u>:

Libro 5. Páginas 17. Ejemplo 1.4.7 (se demuestra por la desigualdad de reacomodo). Páginas 41 – 42, ejemplo 1.6.5, se demuestra utilizando principio del mínimo de Artur Engel.

Libro 6. Página 163, se demuestra utilizando que la suma de dos números recíprocos no es menor que 2. Página 164, se demuestra utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica y luego entre las medias aritmética y geométrica. Página 169, se demuestra utilizando la generalización de la desigualdad de reacomodo.

Libro 10. Páginas 16 – 17 (se ofrecen tres demostraciones utilizando sustituciones algebraicas que son útiles para resolver otros problemas, por ello es interesante revisar este material).

Libro 14. Páginas 83 – 84, ejemplo 458 (se demuestra utilizando identidades algebraicas). Páginas 96 – 97 (se demuestra utilizando desigualdad de reacomodo).

Desigualdad de Tchebychev:

Libro 5. Páginas 21 – 22. Ejemplo 1. 4.11 (se demuestra utilizando la desigualdad de reacomodo).

Libro 6. Páginas 168, se demuestra utilizando la desigualdad de reacomodo.

Libro 13. Página 40, proposición 4.

Libro 14. Página 96 (se demuestra utilizando desigualdad de reacomodo).

Libro 12. Página 13, teoremas 16 – 17 (aparece también la generalización de esta desigualdad).

Desigualdad de Jensen:

Libro 5. Páginas 25 – 26, proposición 1.5.1, tercer inciso y se demuestra utilizando la inducción utilizada por Cauchy para demostrar la desigualdad entre las medias.

Libro 13. Páginas 43 – 46, proposición 6.

Libro 10. Página 44, corolario 4.1.1.

Libro 12. Páginas 11 – 12, teorema 14, se presenta además una demostración de la desigualdad de Karamata utilizando la de Jensen.

Desigualdad de Hölder:

Libro 5. Páginas 32 – 33.

Libro 10. Página 41, teorema 3.4.6.

Libro 12. Páginas 5 – 8, teorema 9 (se ofrecen otras relaciones interesantes como la desigualdad de Minkowski y la de Young .

Desigualdad de Schür:

Libro 5. Página 37, ejercicio 1.84.

Libro 10. Página 29, teorema 3.2.1, corolario 3.2.1.

Libro 12. Página 9, teorema 12.

Teorema de reacomodo:

Libro 5. Páginas 16 (se considera una desigualdad maravillosa, se ofrece su demostración y dos corolarios interesantes y muy útiles y se ofrecen varios ejemplos de olimpiadas).

Libro 14. Páginas 93 – 97, teorema 518.

Libro 6. Páginas 167 - 168.

Generalización de la desigualdad de reacomodo:

Libro 6. Páginas 169 – 170, se introduce una notación de producto escalar y se utiliza en la demostración de un ejemplo.

Teorema de Muirhead:

Libro 2. Se ofrece, además, un análisis de los polinomios homogéneos.

Libro 5. Páginas 44 – 48, se ofrece primero la notación, después 1.7.1, el teorema 1.7.2 (Muirhead), Lemas 1.7.3 y 1.7.4.

Libro 10. Páginas 31 – 33, teorema 3.2.2.

Libro 12. Páginas 9 – 11, teorema 13.

Desigualdades utilizando sustituciones:

Libro 4. (Se utilizan sustituciones interesantes y algunas de las desigualdades estudiadas).

Libro 16. Se utilizan sustituciones trigonométricas interesantes.

Libro 15. Páginas 24 – 33. Aparecenalgunassustituciones trigonométricas elementales y útiles.

Sistematización:

Libro 17. Se ofrecen problemas resueltos aplicando las desigualdades estudiadas.

Libro 19. Se ofrecen ejemplos de como utilizar la función lineal para demostrar desigualdades.

Libro 18. Se ofrecen desigualdades interesantes donde en sus demostraciones se utilizan elementos estudiados.

Libro 11. Páginas 40 – 42. Aparecen problemas de demostración de desigualdades.

Geometría:

Mapa de conocimientos explícitos de Colinealidad y Concurrencia:	Libros
Definición de ceviana	18, 4, 10
Teorema de Ceva	15, 16, 5, 9, 17, 13, 10, 12, 18, 4, 6
Teoremas sobre concurrencia de medianas, alturas y bisectrices interiores de un triángulo	17, 13, 16
Punto de Gergonne	17, 13
Punto de Nagel o Isoperimétrico	17, 6
Teorema de Menelao	15, 16, 5, 10, 9, 17, 13, 12, 4, 6
Teorema de Desargues	16, 5, 17, 10, 9, 6
Teorema de Papus	5, 9, 12, 16, 6
Teorema de Pascal	5, 16, 6
Teorema de Simpson	13, 6
Teorema de Carnot	16
Sistematización	14, 8, 7, 1, 2, 3, 6

<u>Libros utilizados</u>:

Libro 1.Andreescu, T., Feng, Z. y Lee, G. (Eds.)(1997). MathematicalOlympiads. Problems and SolutionsFromAroundtheWorld. 1996 – 1997. (En soporte electrónico).

Libro 2.Andreescu, T., Feng, Z. y Lee, G. (Eds.)(1998). MathematicalOlympiads. Problems and SolutionsFromAroundtheWorld. 1997 – 1998. (En soporte electrónico).

Libro 3.Andreescu, T., Feng, Z. y Lee, G. (Eds.)(1999). MathematicalOlympiads. Problems and SolutionsFromAroundtheWorld. 1998 – 1999. (En soporte electrónico).

Libro 4.Bradley, Ch. (2005). Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present.New York: Oxford UniversityPress. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 28, 92 - 95.

Libro 5.Coxeter, H. S. M and S. L Greitzer. (1975). Geometry Revised. EEUU: Mathematical Association of America. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 79.

Libro 6.Díaz, M. (2007). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II. La Habana: Pueblo y Educación. Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 33 – 40.

Libro 7.Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico).Páginas 12 – 13, 15 (Teo: 2.54, 2.57, 2.59 – 2.61).

Libro 8.Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2010). The IMO Compendium.A colection of problemssuggestesforthe International MathematicOlympiads 1959 – 2009. USA: Springer. (En soporte electrónico).

Libro 9.Kedlaya, K. (1999). Notes on Euclidean Geometry.(En soporte electrónico). Páginas 8 – 13.

Libro 10.Kedlaya, K. (2006). GeometryUnbound. (En soporte electrónico).

Libro 11.Loh, P. (2008). Collinearity and concurrence. (En soporte electrónico).

Libro 12.Prasolov, V.(s. a). Problems in Plane andSolidGeometry. (En soporte electrónico). Páginas 106 – 136.

Libro 13.Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 178 – 184.

Libro 14.Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 70 – 79.

Libro 15.Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico).

Libro 16.Toledo Hernández, P. (2005). Geometría. (En soporte electrónico).

Libro 17.Yiu, P. (s.a). EuclideanGeometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 89 – 100.

Libro 18.Zeitz, P. (2007), The Art and Craft of ProblemSolving. (En soporte electrónico).

Definiciones:

Definición de ceviana:

Libro 18**.**Página 286.

Libro 4. Página 126.

Libro 10. Página 41.

Teoremas, procedimientos y relaciones:

Teorema de Ceva:

Libro 15. Páginas 33 – 35.Epígrafe 3.2 (teorema de Ceva, en unsentido se demuestrautilizandosemejanza de triángulos y en el otroutilizando lo demostradoanteriormente y reducción al absurdo). Epígrafe 3.3 (forma trigonométrica del teorema de Ceva, se demuestrautilizando el teorema: si el vértice A de un triángulo ABC, se une con un punto L en el lado BC, entonces$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \cdot sen\angle BAL}{CA \cdot sen\angle LAC}$, que a su vez se demuestra utilizando la ley de los senos, en el otrosentido se demuestra de manera similar al caso anterior).

Libro 16. Páginas 60 – 62, teorema 2.6.1, demostrado utilizando semejanza de triángulos. Páginas 67 – 68, teorema 2.6.4 (en forma trigonométrica, demostrado utilizando ley de los senos)

Libro 5. Páginas 4 – 6. Epígrafe 1.2, teorema 1.21(se demuestra utilizando que si dos triángulos tienen alturas de igual longitud, la razón entre las áreas es igual a la razón entre las bases, se utiliza (ABC) para denotar el área del triángulo ABC), el recíproco aparece en el teorema 1.22 y se demuestra utilizando el resultado anterior y reducción al absurdo.

Libro 9. Páginas 8 – 9, teorema 2.1 (Ceva) demostrado utilizando razones entre áreas de triángulos con igual altura, aparece también la forma trigonométrica de este teorema.

Libro 17. Páginas 93 – 94, epígrafe 7.4. En el epígrafe 7.6 se presenta la forma trigonométrica del teorema.

Libro 13. Páginas 178 – 179. Teorema 868 (algebraico, demostrado por razones entre áreas de triángulos de igual altura), en el teorema 869 aparece la forma trigonométrica.

Libro 10. Páginas 41 – 43, teorema 5.1.1 (forma algebraica), hecho 5.1.2 (forma trigonométrica).

Libro 12. Página 106, capítulo 5, epígrafe 8 (aparece el enunciado del teorema y varios problemas con soluciones para aplicarlo)

Libro 18. Página 288, demuestra el teorema utilizando propiedades de las proporciones.

Libro 4. Páginas 126, 176.

Libro 6. Página 48 (sin demostración).

<u>Teoremas sobre concurrencia de medianas, alturas y bisectrices interiores de un triángulo</u>:

Libro 17. Páginas 91 – 92, epígrafe 7.5. Ejemplo 7.5.1 (las medianas concurren, se demuestra utilizando el teorema de Ceva y se demuestra, además, que el baricentro corta a la mediana en la razón 2:1 partiendo del vértice, utilizando el teorema de Menelao). Ejemplo 7.5.2 (las bisectrices concurren, se demuestra utilizando el teorema de Ceva)

Libro 13. Páginas 185, teorema 883 (las medianas de un triángulo concurren, demostrado por el teorema de Ceva), aparecen otras propiedades importantes de las medianas y el baricentro. Página 188, teorema 894 (las alturas de un triángulo concurren, demostrado por el teorema de Ceva), teorema 897 (las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren), se demuestra utilizando el teorema de la bisectriz y el de Ceva.

Libro 16. Páginas 62 – 63 (las medianas, las alturas y las bisectrices interiores de un triángulo concurren, demostrados por el teorema de Ceva).

<u>Punto de Gergonne</u>:

Libro 17. Páginas 113 – 114, epígrafe 8.5.2, se demuestra utilizando el teorema de Ceva.

Libro 13. Páginas 188 – 189. Teorema 900, demostrado utilizando el teorema de Ceva, se define, además, el triángulo de Gergonne.

Punto de Nagel o Isoperimétrico:

Libro 17. Páginas 113 – 114, epígrafe 8.5.2, se demuestra utilizando el teorema de Ceva.

Libro 6. Página 49 (sin demostración).

Teorema de Menelao:

Libro 15. Páginas 35 – 36. Epígrafe 3.4 (teorema de Menelao, en unsentido se demuestrautilizandosemejanza de triángulos y en el otroutilizando lo demostradoanteriormente y reducción al absurdo). Epígrafe 3.5 (forma trigonométricadelteorema de Menelao, planteaque la pruebaessemelante a la forma trigonométrica del teorema de Ceva).

Libro 16. Páginas 64 – 65, teorema 2.6.2, demostrado utilizando semejanza de triángulos. También se ofrece el teorema de Ceva-Menelao o de división interna y externa en el teorema 2.6.3. Página 68, teorema 2.6.5 (forma trigonométrica, se puede demostrar similar al de Ceva)

Libro 5. Páginas 66 – 67, teorema 2.11, se demuestra aquí también la fórmula de Euler.

Libro 10. Página 44, teorema 5.2.1.

Libro 9. Páginas 10 – 11, teorema 2.3 (Menelao).

Libro 17. Páginas 91 – 92, epígrafe 7.3.

Libro 13. Páginas 179 – 180. Teorema 870 (algebraico, demostrado por razones entre áreas de triángulos de igual altura).

Libro 12. Página 104, capítulo 5, epígrafe 7 (aparece el enunciado del teorema y varios problemas con soluciones para aplicarlo)

Libro 4. Páginas 28, 175.

Libro 6. Página 48 (sin demostración).

Teorema de Desargues:

Libro 16. Páginas 69 – 75 (Se demuestra el teorema utilizando el teorema de Menelao y se analizan varios casos particulares muy importantes). Teorema 2.7.1 – 2.7.3.

Libro 5. Páginas 70 – 72, teorema 3.61, se demuestra utilizando varias veces el teorema de Menelao, se demuestra el teorema 3.62 utilizando el teorema de Desargues.

Libro 17. Páginas 91 – 92, epígrafe 7.9.1, se demuestra utilizando varaias veces el teorema de Menelao.

Libro 10. Página 44 – 45, teorema 5.2.2, demostrado utilizando el teorema de Menelao varias veces.

Libro 9. Página 11, teorema 2.4, demostrado utilizando varias veces el teorema de Menelao.

Libro 6. Página 48 (sin demostración).

Teorema de Pascal:

Libro 5. Páginas 74 – 76, teorema 3.81, se demuestra utilizando varias veces el teorema de Menelao.

Libro 16. Página 69 (solo se enuncia). Páginas 106 – 107, se demuestra el teorema utilizando varias veces el teorema de Menelao.

Libro 6. Página 53 (sin demostración).

Teorema de Papus:

Libro 5. Páginas 67 – 69, teorema 3.51, se demuestra utilizando el teorema de Menelao.

Libro 9. Páginas 11 – 12, teorema 2.5 no se demuestra y se plantea que es similar a la del teorema deDesargues pero más complicada.

Libro 12. Página 105, capítulo 5, epígrafe 7, problema 5.65.

Libro 16. Páginas 68 – 66, teorema 2.6.6 (se enuncia de dos formas).

Libro 6. Página 48 – 49 (sin demostración).

Teorema de Simpson:

Libro 13. Páginas 181. Teorema 873, se demuestra utilizando el teorema de Menelao.

Libro 6. Página 44 (sin demostración, se ofrecen algunas propiedades importantes).

Teorema de Carnot:

Libro 16. Páginas 104 – 105 (se demuestra utilizando el teorema de Menelao).

Sistematización:

Libro 14. Collinearity and concurrence. (En soporte electrónico).

Libro 8. Página 329, 747 – 748, problema 19 (ShortlistedProblems 2006).

Libro 7. Página 117, 417, problema 30 (longlistedProblems 1977). Página 227, 508, problema 15 (ShortlistedProblems 1988). Página 251, 533 – 534, problema 10 (ShortlistedProblems1990).Página 254, 544, problema 1 (ShortlistedProblems 1991). Página 255, 544, problema 2 (ShortlistedProblems 1991). Página 255, 545 – 546, problema 4 (ShortlistedProblems 1991). Página 279, 585, problema 13 (ShortlistedProblems 1994). Página 283, 592, problema 9 (ShortlistedProblems 1995). Página 283, 595, problema 14 (ShortlistedProblems 1995). Página 289, 607, problema 13 (ShortlistedProblems 1996).Página 294, 622, problema 9 (ShortlistedProblems 1997). Página 310, 671 – 672, problema 22 (ShortlistedProblems 2000). Página 314, 681 – 682, problema 15 (ShortlistedProblems 2001). Página 315, 684 – 685, problema 20 (ShortlistedProblems 2001). Página 325, 707, problema 14 (ShortlistedProblems 2003).

Libro 1. Página 81, problema 2. Páginas 3, problema 2. Páginas 103 – 104, problema 16. Páginas 124, problema 17.

Libro 2. Páginas 7 – 8, problema 2. Páginas 9 – 10, problema 4. Página 29, problema 4. Páginas 70, problema 8. Páginas 131 – 132, problema 2. Página 149, problema 1.Página 161, problema 2.

Libro 3. Páginas 92, problema 7. Páginas 35 – 36, problema 4. Páginas 60, problema 2. Páginas 103 – 104, problema 16. Páginas241 – 243, problema 6. Páginas271 – 272, problema 12. Página 281, problema 26.

Libro 6. Página 122, 180, problema 195. Página 207, 209 – 210, problema 3.

Mapa de conocimientos explícitos de Cuadriláteros Cíclicos:	Libros
Definición de cuadrilátero cíclico	7, 23
Definición de potencia de puntos	20, 21, 8, 14, 13, 1
Definición de eje radical	20, 21, 8, 14, 13
Definición de centro radical	20, 13
Teoremas relativos a ejes y centros radicales	20, 8
Condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea cíclico	
Suma de los ángulos opuestos 180º	10, 23, 1
Ángulos iguales en posición de inscritos sobre uno de los ladosdel cuadrilátero como cuerda	10, 1
Potencia de un punto interior a la circunferencia	22
Potencia de un punto exterior a la circunferencia	22
Teorema de Ptolomeo	8, 18, 7, 21, 6, 10, 23, 19, 9
Teorema de Miquel	21, 18, 22, 14
Teorema de Casey	6, 10, 15, 19
Sistematización	17, 12, 1, 16, 5, 11, 10, 4, 2, 3, 9

<u>Libros utilizados</u>:

Libro 1.Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). MathematicalOlympiadChallenges. Boston: Birkhäuser. (En soporte electrónico). Páginas 6 – 19.

Libro 2.Andreescu, T., Feng, Z. y Lee, G. (Eds.)(1997). MathematicalOlympiads. Problems and SolutionsFromAroundtheWorld. 1996 – 1997. (En soporte electrónico).Páginas 5, 12, 22, 32, 63, 93 – 94, 127.

Libro 3.Andreescu, T., Feng, Z. y Lee, G. (Eds.)(1998). MathematicalOlympiads. Problems and SolutionsFromAroundtheWorld. 1997 – 1998. (En soporte electrónico).Páginas 17 – 18, 25, 27 – 28, 41, 55, 70, 76 – 77, 97, 145, 154 – 155, 156 – 157.

Libro 4.Andreescu, T., Feng, Z. y Lee, G. (Eds.)(1999). MathematicalOlympiads. Problems and SolutionsFromAroundtheWorld. 1998 – 1999. (En soporte electrónico).Páginas 26, 47 – 50, 64, 73 – 74, 86 – 87, 92 – 94, 120 – 121, 154, 161, 214, 217 – 218, 236 – 237, 241 – 243, 253 – 254, 257 – 258, 266 – 267, 276.

Libro 5.Andreescu, T., Feng, Z. y Lee, G. (Eds.)(2001). MathematicalOlympiads. Problems and SolutionsFromAroundtheWorld. 2000 – 2001. (En soporte electrónico).Páginas 75, 117 – 118, 159 – 160.

Libro 6.Bellot Rosado, F. (s.a). Los teoremas de Ptolomeo y su generalización por Casey. Aplicaciones. En la revista del escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática. (En soporte electrónico).

Libro 7.Bradley, Ch. (2005). Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present.New York: Oxford UniversityPress. (En soporte electrónico). Páginas 24 – 28, 92 - 95.

Libro 8.Coxeter, H. S. M and S. L Greitzer. (1975). Geometry Revised. EEUU: Mathematical Association of America. (En soporte electrónico). Páginas 1 – 79.

Libro 9.Díaz, M. (2007). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II. La Habana: Pueblo y Educación.

Libro 10.Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2006). The IMO Compendium.A colection of problems suggestes for the International Mathematic Olympiads 1959 – 2004.USA: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 12, 14 – 15, 43, 55, 121, 178, 192, 203, 228, 280, 282 – 283, 288, 294 – 295, 298, 310 – 311, 318, 325, 330 – 331,348, 367 – 368, 469 – 470, 480, 485 – 486, 509, 586, 591 – 592, 595, 605 – 606, 621, 627, 633 – 634, 671 – 674,691, 708, 722 – 723, 725.

Libro 11.Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. y Petrovic, N. (2010). The IMO Compendium.A colection of problemssuggestesforthe International MathematicOlympiads 1959 – 2009. USA: Springer. (En soporte electrónico). Páginas 324, 329, 736 – 737, 747.

Libro 12.Feng, Z. y Sun, Y. (Eds.)(2013). USA and International MathematicalOlympiads 2012-2013. (En soporte electrónico). Páginas 48 – 49, 58 – 59, 65 – 67, 78.

Libro 13.Kedlaya, K. (1999). Notes on Euclidean Geometry.(En soporte electrónico). Páginas 8 – 13.

Libro 14.Kedlaya, K. (2006). GeometryUnbound. (En soporte electrónico). Páginas 44 – 54, 67 – 70.

Libro 15.Lee, H., Lovering, T. y Pohoata, C. (2008). Infinity. (En soporte electrónico).Página 59

Libro 16.Li, K. (2001). Math Problem Book I. (En soporte electrónico). Página 72, 83, 95, 96.

Libro 17.Lidski y otros (1972). Problemas de Matemática elemental. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Problemas 319, 351, 358, 371, 382 – 384, 391.

Libro 18.Santos, D. (2010). Taller de resolución de problemas. (En soporte electrónico). Páginas 109 – 110, 182.

Libro 19.Shariguin, I. (1989). Problemas de Geometría. Planimetría. Moscú: MIR. (En soporte electrónico). Páginas 113 – 131.

Libro 20.Shively, L. S. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. México: Editorial Continental. (En soporte electrónico). Páginas 25 – 26.

Libro 21.Toledo Hernández, P. (2005). Geometría. (En soporte electrónico).

Libro 22.Yiu, P. (s.a). EuclideanGeometry Notes. (En soporte electrónico). Páginas 45 – 46, 148 – 152.

Libro 23.Zeitz, P. (2007), The Art and Craft of ProblemSolving. (En soporte electrónico).

Definiciones:

Definición de potencia de puntos:

Libro 20**.**Página 81.Epígrafe 6.1.

Libro 21. Página 102, teorema 3.6.1.

Libro 8. Páginas 28 – 29, teorema 2.11, se demuestra aquí también la fórmula de Euler.

Libro 14. Página 47, teorema 6.1.1.

Libro 13. Página 21, teorema 4.1.

Libro 1. Página 10.

Definición de cuadrilátero cíclico:

Libro 7. Página 24.

Libro 23. Página 266.

Definición de eje radical:

Libro 20. Páginas 81 – 82. Epígrafe 6.1. Se ofrecen, además, algunaspropiedadesimportantesdeleje radical.En la página 83, epígrafe 6.4, se explicacómoconstruir el eje radical de dos circunferencias.

Libro 21. Páginas 107 – 112, definición 3.8.1 (además se analizan casos particulares y propiedades importantes de los ejes radicales).

Libro 8. Páginas 31, teorema 2.21.

Libro 14. Página 49, teorema 6.2.1, se ofrecen relaciones importantes de los ejes radicales.

Libro 13. Página 23, teorema 4.3.

Definición de centro radical:

Libro 20. Páginas 82 – 83. Epígrafe 6.3.

Libro 13. Página 23, corolario 4.4.

Teoremas, procedimientos y relaciones:

Teoremas relativos a ejes y centros radicales:

Libro 20. Páginas 83 – 88. Epígrafe 6.5 (circunferenciasortogonales a dos circunferencias), epígrafe 6.6 (ejesradicales de incírculos y excírculos), epígrafe 6.7 (circunferenciascoaxiales), epígrafe 6.8 (circunferenciascoaxialesque se intersecan), epígrafe 6.9 (circunferenciascoaxialesque no se intersecan).

Libro 8. Páginas 38 – 39, teorema 2.45 (si dos circunferencias son construidas en dos cevianas como diámetros el eje radical pasa por el ortocentro), teorema 2.46 (para cada tres circunferencias no coaxiales que tienen cevianas por diámetros el ortocentro es su centro radical), teorema 2.47.

Condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea cíclico:

Suma de los ángulos opuestos 180º:

Libro 10. Página 14, teorema 270 (sin demostración).

Libro 23. Página 66.

Libro 1. Página 6, teorema 1.

<u>Ángulos iguales en posición de inscritos sobre uno de los lados del cuadrilátero como cuerda</u>:

Libro 10. Página 14, teorema 270 (sin demostración).

Libro 1. Página 6, teorema 2.

<u>Potencia de un punto interior a la circunferencia</u>:

Libro 22. Páginas 45 – 46, 148 – 152.

<u>Potencia de un punto exterior a la circunferencia</u>:

Libro 22. Páginas 45 – 46, 148 – 152.

<u>Teorema de Ptolomeo</u>:

Libro 8. Páginas 42, teorema 3.41.

Libro 18. Página 182. Teorema 876 (desigualdad de Ptolomeo), en el teorema 869 aparece la forma trigonométrica.

Libro 7. Página 25 – 26.

Libro 21. Páginas 84 – 85, teorema 3.1.1, teorema 3.2.2 (teorema extendido de Ptolomeo, o teorema de Ptolomeo-Euler).

Libro 6. (Enuncia y demuestra dos teoremas de Ptolomeo y propone ejemplos interesantes).

Libro 10. Página 14, teorema 271 (sin demostración).

Libro 23. Páginas 66 y 296.

Libro 19. Páginas 118, problema II.237.

Libro 9. Página 52 (sin demostración).

<u>Teorema de Miquel</u>:

Libro 21. Páginas 92 – 98. (Se demuestra el teorema y se analizan casos particulares).

Libro 18. Páginas 109 – 110. Teorema 595, se demuestra utilizando colinealidad y cuadriláteros cíclicos.

Libro 22. Página 69.

Libro 14. Página 35, teorema 4.2.5, se demuestra utilizando colinealidad y cuadriláteros cíclicos.

Teorema de Casey:

Libro 6. Demuestra el teorema y propone ejemplos interesantes.

Libro 10. Página 15, teorema 272 (sin demostración).

Libro 15. Página 59, teorema 4.9.

Libro 19. Páginas 118, problema II.239 (aparece como teorema generalizado de Ptolomeo).

Sistematización:

Libro 17. Problemas 319, 351, 358, 371, 382 – 384, 391.

Libro 12. Páginas 48 – 49, problema 4. Páginas 58 – 59, problema 1. Páginas 65 – 67, problema 6. Página 78, problema 6.

Libro 1. Páginas 9 – 10, problemas 1 – 14 (solucionespáginas 110 – 118).Páginas 13 – 15, problemas 1 – 16 (solucionespáginas 118 – 125).

Libro 16. Página 72, problema 74. Página 83, problema 83. Página 95, problema 103. Página 96, problema 105.

Libro 5. Página 75, problema 3. Página 117 – 118, problema 27. Página 159 – 160, problema 3.

Libro 11. Página 324, 736 – 737, problema 14 (ShortlistedProblems 2005). Página 329, 747, problema 18 (ShortlistedProblems 2006).

Libro 10. Página 43, 348, problema 9 (longlistedProblems 1967). Página 55, 367 – 368, problema 4 (IMO 1969). Página 121(Shortlisted 8), 348, problema 22 (longlistedProblems 1977). Página 178, 469 – 470, problema 15 (ShortlistedProblems 1984). Página 192, 480, problema 22 (ShortlistedProblems 1985). Página 203, 485 – 486, problema 16 (ShortlistedProblems 1986).Página 228, 509, problema 17 (ShortlistedProblems 1988). Página 280, 586, problemas 16 – 17 (ShortlistedProblems 1994). Página 282 – 283, 591 – 592, problema 7, 9 (ShortlistedProblems 1995). Página 283, 595, problema 14 (ShortlistedProblems 1995). Página 288, 605 – 606, problemas 10 – 11 (ShortlistedProblems 1996). Página 294, 621, problema 7 (ShortlistedProblems 1997). Página 295, 627, problema 18 (ShortlistedProblems

1997). Página 298, 633 – 634, problema 4 (ShortlistedProblems 1998). Página 310, 671, problemas 20 – 21 (ShortlistedProblems 2000). Página 310, 672, problemas 23 (ShortlistedProblems 2000). Página 311, 673 – 674, problema 27 (ShortlistedProblems 2000). Página 318, 691, problema 7 (ShortlistedProblems 2002). Página 325, 708, problema 17 (ShortlistedProblems 2003). Página 330, 722, problema 16 (ShortlistedProblems 2004). Página 330, 723, problema 19 (ShortlistedProblems 2004). Página 331, 725, problema 23 (ShortlistedProblems 2004).

Libro 4. Página 26, problema 14. Páginas 47 – 50, problema 5. Páginas 64, problema 7. Páginas 73 – 74, problema 4. Páginas 86 – 87, problema 1. Páginas 92 – 94, problema 7. Páginas 120 – 121, problema 5. Página 154, problema 6. Páginas 161, problema 14. Páginas 214, problema 5. Páginas 217 – 218, problema 2. Páginas 236 – 237, problema 4. Páginas 241 – 243, problema 6. Páginas 253 – 254, problema 2. Páginas 257 – 258, problema 2. Página 266, problema 2. Página 267, problema 4. Página 276, problema 20.

Libro 2. Página 5, problema 5. Páginas 12, problema 1. Página 22, problema 1. Página 32, problema 7. Página 63, problema 9. Páginas 93 – 94, problema 5. Página 127, problema 23.

Libro 3. Páginas 17 – 18, problema 13. Página 25, problema 4. Páginas 27 – 28, problema 2. Páginas 41, problema 4. Página 55, problema 2. Página 70, problema 8. Páginas76 – 77, problema 5. Página 97, problema 37.Página 145, problema 1. Páginas 154 – 155, problema 5. Páginas 156 – 157, problema 2.

Libro 9. Página 118, 162, problema 140. Página 119, 170, problema 161.

INSTRUMENTOS QUE PUEDEN SER UTILIZADOS PARA LA IDENTIFICACIÓN DE CONCURSANTES EN MATEMÁTICA DE LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA Y ALGUNAS PRUEBAS QUE SE PUEDEN EMPLEAR EN LA PREPARACIÓN

Test de Completar Frases (B. Rotter y J. Rofferty)

INSTRUCCIONES: Completa las siguientes frases de modo que en ellas expreses tus verdaderos sentimientos, ideas u opiniones. Trata de completar todas las frases.

1. Me gusta ____
2. El tiempo más feliz _____________________________________
3. Quisiera saber ____
4. Lamento ____
5. El mejor momento _______________________________________
6. Me molesta ____
7. Siento ____
8. Mi mayor temor ____
9. En la escuela ____
10. No puedo ____
11. Mis nervios ____
12. Las otras personas _____________________________________
13. Sufro ____
14. Fracasé ____
15. La lectura ____
16. Mi mente ____
17. Yo necesito ____
18. Mi futuro ____
19. Estoy mejor cuando _____________________________________
20. Algunas veces ____
21. Me duele ____
22. Odio ____
23. Este lugar ____
24. Estoy muy ____

25. La preocupación principal ________________________________

26. Deseo ____

27. Mis padres ____

28. Yo ____

29. Mis diversiones ____

30. Mi mayor problema es __________________________________

31. El trabajo ____

32. Amo ____

33. Me pone nervioso ______________________________________

34. Mi principal ambición ___________________________________

35. Yo prefiero ____

36. Mi problema principal en la elección de la carrera o profesión _____

37. Quisiera ser ____

38. Creo que mis mejores aptitudes son ________________________

39. La personalidad _______________________________________

40. La felicidad ____

Ejercicios sobre semejanzas y diferencias

Ejemplos:

Se proponen 50 ejercicios como los que se muestran. En estos ejercicios teniendo en cuenta la relación que se establece entre las dos primeras palabras se determina la palabra que tiene la misma relación con la que aparece después de como:

1. Hombre es a caminar, como pez es a: papel, tiempo, niña, nadar
2. Oscuro es a claro, como negro es a: rojo, blanco, claro, puro
3. Hierba es a verde, como cielo es a: mesa, azul, caliente, nublado.
4. Carpintero es a madera como herrero es a: herradura, caballo, hierro, clavo.
5. Vaca es a toro como caballo es a: potro, yegua, caballito, jinete.
6. Mesa es a madera como vela es a: luz, claridad, oscuridad, cera.
7. Lunes es a jueves como miércoles es a: martes, jueves, sábado, domingo.
8. Antes es a después como día es a: sol, noche, estrellas, playa.
9. Espada es a guerrero como espuela es a: jinete, gallo, toro, caballo.
10. Hombre es a niño como toro es a: vaca, cuerno, ternero, carne.
11. Candela es a calor como hielo es a: refrigerador, agua, frío, temperatura.
12. Regla es a longitud como termómetro es a: fiebre, Rolando, temperatura, presión.
13. Cielo es a azul como plantas es a: vegetación, leña, verde, hojas.
14. Lombriz es a tierra como pez es a: pecera, estanque, agua, congelador.
15. Panal es a abeja como edificio es a: constructor, cemento, concreto, plano.
16. Toro es a hierba como león es a: hombre, carne, venado, hueso.
17. Hombre es a zapato como caballo es a: casco, coche, montura, herradura.
18. Caliente es a frío como seco es a: frío, mojado, vino, cálido.
19. Fosforera es a fósforo como refrigerador es a: hielo, frío, nevera, conservación.
20. Día es a noche como trabajador es a: trabajo, perezoso, laborioso, entrenamiento.
21. Martí es a Cuba como Bolívar es a: Argentina, Costa Rica, Estados Unidos de América, Venezuela.
22. Martí es a Fidel como Bolívar es a: libertador, independencia, Chávez, Venezuela.
23. Árbol es a oxígeno como hombre es a: aire, dióxido de carbono, atmósfera, carbono.
24. Cáscara es a árbol como pintura es a: bonito, limpio, pared, cuidado.

25. Carne es a picadillo como maíz es a: tamal, dulce, harina, mazorca.
26. Perro es a gato como gato es a: león, perro, casa, ratón.
27. Televisor es a imagen como radio es a: noticias, música, sonido, plástico.
28. Paloma es a águila como gato es a: paloma, perro, elefante, ratón.
29. Montaña es a alto como llanura es a: plantas, viviendas, bajo, siembras.
30. Cabeza es a píes como techo es a: pared, silla, piso, cocina.
31. 2 es a 100 como 3 es a: 300, 1000, 900, 1500.
32. 4 es a 9 como 25 es a: 49, 16, 36, 64.
33. 4 es a 7 como 6 es a: 17, 23, 13, 29.
34. Rosado es a rojo como gris es a: oscuro, negro, azul, verde.
35. 3 es a 6 como 5 es a: 12, 16, 10, 8.
36. Mediano es a pequeño como grande es a: pequeño, enorme, mediano, inmenso.
37. Coche es a caballo como carro es a: velocidad, motor, petróleo, rapidez.
38. Puerta es a madera como libro es a: palabra, escribir, papel, conservar.
39. b es a d como m es a: k, o, p, q.
40. Pie es a hombre como casco es a: maíz, árbol, caballo, azada
41. Perro es a ladrido como gato es a: silla, maullido, cocina, casa
42. Rey es a reino como presidente es a: vicepresidente, estado, república, democracia.
43. Negro es a blanco como noche es a: buena, ropa, madre, día
44. Techo es a casa como sombrero es a: botón, zapato, paja, cabeza
45. Codo es a brazo como rodilla es a: pierna, pantalones, huesos, hombre
46. Derecha es a izquierda como oeste es a: sur, dirección, este, norte
47. Paja es a sombrero como cuero es a: zapato, música, suave, cordón
48. Sombrero es a cabeza como dedal es a: cocer, tela, dedo, mano
49. Maleta es a ropa como cartera es a: comprar, dinero, cierre, robar
50. Piel es cuerpo como corteza es a: árbol, leche, cuchillo, herida
51. Estimar es a amigo como despreciar es a: detestar, enemigos, abandonar, gente
52. Codorniz es a cazador como sardina es a: mar, aceite, lata, pescador
53. Toro es a ternero como caballo es a: mulito, potro, torito, gato
54. Sartén es a hierro como mesa es a: silla, madera, patas, platos
55. Gato es a tigre como perro es a: ladrido, lobo, muerde, caza

56. Aeroplano es a aire como submarino es a: sumergir, máquina, barco, agua
57. Lunes es a martes como viernes es a: semana, jueves, día, sábado
58. Piso es a techo como terreno es a: tierra, cielo, colina, hierba
59. Hospital es a enfermo como prisión es a: celda, criminal, reja, cárcel
60. Revolver es a hombre como aguijón es a: pistola, herir, abeja, mano
61. Si es a no como afirmativo es a: ganar, debate, denegar, negativo
62. Establecer es a abolir como empezar es a: trabajar, año, finalizar, comenzar
63. Orden es a confusión como paz es a: partido, tratado, guerra, enemigo
64. Educación es a ignorancia como riqueza es a: pobreza, abundancia, salud, fortuna
65. Agua es a pez como aire es a: chispa, hombre, palabra, respira
66. Cañón es a grande como fusil es a: bala, pequeño, disparar, calibre
67. Sótano es a azotea como fondo es a: pozo, barril, cima, casa
68. Arteria es a cuerpo como carretera es a: país, camión, autopista, choque
69. Historia es a verdad como novela es a: imaginación, Cervantes, escritor, libro
70. Cebú es a toro como chihuahua es a: México, ciudad, perro, gato
71. Llanto es a risa como tristeza es a: alegría, sufrimiento, funerales, congoja
72. Oscuridad es a luz como silencio es a: quietud, ruido, sosiego, calma
73. Traído es a raído como regreso es a: hogar, progreso, vacaciones, egreso
74. Veneno es a muerte como alimento es a: comer, pájaro, vida, malo
75. Maquinista es a chofer como locomotora es a: hierro, tren, chimenea, automóvil

Ejercicios de símbolos y palabras

Se proponen 25 ejercicios como los que se muestran, en los que cada símbolo representa una letra y a símbolos iguales corresponden letras iguales y viceversa. Del mismo modo que a diferentes símbolos corresponden diferentes letras.

1. #&#	pio – dad – rio – faz – las
2. X=: X	losa – perro – moza – lija – odio
3. Φ&Φ?	sota – velo – pira – oboe – irán
4. $%!%	coco – casa – pero – arca – área
5. ∀#∃∀%&∍	caballo – persona – círculo – camello – dichoso
6. ΠΘΨΞψΘΛΘ	cacerola – perezoso – colorado – caminata – amarillo
7. &%&∃ΨΘ	Pompas – rampas – mantas – mentas – amante
8. Σ&%∍Σ&%ΛΘ&	Matemático – resonancia – Matemática – deliberado – consonante
9. ΛΘ%ψ∀ΛΘ#	colorado – amapolas – amarillo – nacional – pimienta
10.Ψ∃ΣΛΠΘΠ&Π	pimientos – destacada – amarillos – caballero – camellito
11.ΠΣΨ%&ΣΞΣΠ□	matemática – consonante – pitagórico – antagónico – científico
12.Σ&∀ψ∈Σ&Σ	adecuada – personal – circular – caballos – ambiente
13.&∀Π∀Θ∀∃	persona – difícil – donosos – dichosos – amoroso
14.□Λ&%∀□Θ∀%#	exteriores – resonancia – interiores – deliberado – consonante
15.Λ∈Π∈Ψ∀Π&∈Λ	semejantes – apremiante – importante – matemático – pitagórico
16.ΘΛ%Θ%Σ∈∃∈%#	matemáticos – proposición – resonancias – computación – antagónicos
17.∃∈∍∃%∍∈ΣΛΘ	deliberado – matemática – biológicos – organismos – calculando
18.Λ∃Σ∀ΨΨ□&&∀Ψ	desarrollar – informático – electrónico – calculadora – acomodarlas
19.Ψ∀&□Σ∃Λ	Química – segunda – físicos – círculo – amperes
20.&ΠΣ□&%∃	implica – físicos – químico – atómico – soluble
21.∃%&□ΣΠΛ∀ΠΣ	telescopio – programado – estructura – telefónico – contribuir

22.Ξψ#϶∈ψΘ	químico – atómico – ponemos – anónimo – cloruro
23.ψ#ΠΛ&∃ψ	seguros – físicos – anónimo – sulfuro – sulfato
24.$%&%	miro – creo – rata – ropa – Elba
25.%&%&	tapa – peso – poco – tono – pepe
26.?&?%	ajos – bota – oros – sopa – caso
27.$=&$&	ámbar – sesos – airar – jamón – libro
28.¡$%&%	mirar – papas – canas – monos – hojas
29.ª!$%!	toros – tanto – tapar – otoño – corto
30.$&%=&	pasas – rombo – antes – pesca – ahora
31.$%&$%	pilón – pampa – queja – trama – magno
32.¡$%&%?	Morera – doctor – pereza – pomada – objeto
33.●φ϶∗&Θ	aceite – poroso – casaos – cambio – pecera
34.#%&∗ϑ∗	camión – pecoso – donoso – joroba – galera
35.ϑΦϑΔ∗Χ	bosque – revisa – alados – viraje – pintar
36.&϶∃∃϶φ	normal – callar – seguir – ademán – abriga
37.#∀&%ϑΦφ	usuario – revisar – vigilar – founder - aptitud
38.ΘΦΓΦφφΦ	maricel – clarisa – montaña – batalla – alegría
39.ΦφΟΘφΩ◊Φ	protege – formato – archivo – ventana – secretos
40.&∗ϑΟΦΘΟ	español – mercado – control – todavía – director
41.%&϶αϑΦΟ	haberme – Leandro – conocer – retírela – aumenta
42.∃%&α&϶%Φ	biología – registro – utilizar – autoriza – acertijo
43.ΑΔΕΦϑΑΛΦ	práctica – ejercita – programa – aprobado – solución
44.#ΦΜΓΑ#Φ#	Federico – trabajar – compañía – impartir – admirada
45.∈ϑφΦφβδϑ	intuirse – ejercita – provocar – revelado – resignar

Ejercicios de respuestas rápidas

Se proponen 20 ejercicios sencillos como los que se muestran donde solo se necesita que se dé la respuesta:

1. ¿Cuántos son 40 cañones y 6 cañones?
2. Si ahorras $6.00 al mes ¿cuánto ahorrarás durante cinco meses?
3. Si dividimos 32 hombres en grupos de 8, ¿cuántos grupos habrá?
4. Juan tenía 11 corbatas, compró 3 más y después regaló 6. ¿Cuántas corbatas le quedaron?
5. Un batallón avanzó 6 kilómetros y después retrocedió 3. ¿A qué distancia quedó de su primera posición?
6. ¿Cuántas horas demorará una carreta en recorrer 48 kilómetros a una velocidad de 4 kilómetros por hora?
7. ¿Cuántos lápices se pueden comprar con 40 centavos si se venden al precio de 2 por 5 centavos?
8. Un batallón marchó 40 kilómetros en 5 días. El primer día marchó 9 kilómetros, el segundo 6, el tercero 10 y el cuarto 9 ¿cuántos kilómetros marchó el último día?
9. Si usted compra dos paquetes de picadura de tabaco a 8 centavos cada uno y una pipa de 55 centavos, y entrega para pagar su compra un billete de $1.00. ¿Cuánto le devolverán?
10. Si 8 hombres necesitan 2 días para cavar una zanja de 160 metros de largo, ¿cuántos hombres se necesitarían para cavarla en medio día?
11. Un comerciante compró cierto número de mulos en $ 900. Los vendió en $1.000 ganando $ 25 en cada mulo. ¿Cuántos mulos compró?
12. Un depósito rectangular tiene capacidad para 600 metros cúbicos de cal. Si el depósito tiene 10 metros de ancho y 5 de profundidad, ¿cuál es la longitud?
13. Un estudiante gastó la octava parte del dinero que tenía en tarjetas postales y el cuádruplo de esa cantidad en una caja de papel para escribir. Le quedaron entonces 60 centavos. ¿Cuánto dinero tenía al principio?
14. Si 2 toneladas de pienso, cuestan $ 20. ¿Cuánto costarán 4 toneladas?
15. Un barco con una tripulación de 600 hombres tiene víveres para 6 meses, ¿cuánto tiempo durarían los víveres si la tripulación fuera de 800 hombres?
16. Si un tren recorre 200 metros en 10 segundos. ¿Cuántos metros recorrerá en un quinto de segundo?

17. Un submarino avanza 10 kilómetros por hora bajo el agua y 20 kilómetros por hora navegando en la superficie. ¿Qué tiempo le tomará atravesar un canal de 100 kilómetros si durante la travesía tiene que navegar bajo el agua las tres quintas partes de la distancia?
18. 18. Si 214 cuadrillas de trabajadores tienen que cavar 4 066 metros de trinchera, ¿cuántos metros debe cavar cada cuadrilla?
19. Una división está compuesta por 2 000 hombres de artillería, 15 000 de infantería y 1 000 de caballería. Si cada una de esas tres ramas se aumenta proporcionalmente hasta completar un total, para la división, de 19 800 hombres, ¿cuántos habrá que añadir a la artillería?
20. Una casa de comercio que ya le había suministrado 1 897 barriles de manzanas a un regimiento, entregó el resto de sus existencias a 28 batallones de ese resto cada batallón recibió 47 barriles. ¿Cuál fue el número total de barriles suministrados?

Ejercicios de prácticas de series numéricas

Se proponen 10 incisos como los que se proponen, donde sea necesario buscar la ley de formación, para determinar el número que no se corresponde con dicha ley.

Diga el número que está equivocadoen las siguientes sucesiones numéricas:

1	2	4	7	8	10	13	14	15	19	20
1	2	4	5	10	11	22	44	46	47	94
2	4	2	6	8	3	10	12	4	14	15
1	2	3	3	5	5	7	7	9	9	11
6	8	11	10	12	15	17	16	19	18	20
19	28	36	43	41	50	58	56	53	62	70
1	1	2	3	5	9	13	21	34	55	89
2	5	10	17	26	36	50	65	82	101	122

Otra forma de preguntar sería:

Diga el número que sigue en la sucesión numérica

1. 1, 3, 7, 13, 21, …
2. 7, 9, 11, 13, 15, …
3. 9, 16, 25, 36, 49, …
4. 36, 42, 48, 54, 60, …
5. 8, 27, 64, 125, 216, …
6. 11, 15, 15, 19, 19, …
7. 10, 11, 21, 32, 53, …
8. 2, 3, 6, 18, 108, …
9. 2, 6, 12, 20, 30, …
10. 12, 15, 21, 24, 30, …
11. 11, 31, 95, 283, 851, …
12. 2, 5, 15, 18, 54, 57, …

Ejercicios de sucesiones o secuencias.

Se proponen 25 ejercicios como los que se muestran, donde tengan que buscar relaciones entre los elementos:

1. ¿Qué número sigue? 41 38 35 32 29 26 ( )
2. ¿Qué grupo está fuera de lugar? ace ceg fhg gik ( )
3. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: ghxijxklx? ( )
4. ¿Qué número sigue? 25 25 20 20 15 15 ( )
5. ¿Qué grupo está fuera de lugar? fge jki mnl opq ( )
6. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: dedfdgdh? ( )
7. ¿Qué número sigue? 42 40 38 36 34 32 ( )
8. ¿Qué grupo está fuera de lugar? aac ffg ggi lln ( )
9. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: deefffgggg? ( )
10. ¿Qué número sigue? 20 2 18 2 16 2 ( )
11. ¿Qué grupo está fuera de lugar? lkkl ijji mllm edde ( )
12. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: dedefgfghih? ( )
13. ¿Qué número sigue? 26 22 20 16 14 10 ( )
14. ¿Qué grupo está fuera de lugar? higf decb debc efdc ( )
15. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: mmññpprr? ( )
16. ¿Qué número sigue? 5 7 10 12 15 17 ( )
17. ¿Qué grupo está fuera de lugar? abca tuvs tvus mnñl ( )
18. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: ghghjghkgh? ( )
19. ¿Qué número sigue? 13 5 14 6 15 7 ( )
20. ¿Qué grupo está fuera de lugar? tust lmlm lmñl efde ( )
21. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: cdexyzfghxyzijk? ( )
22. ¿Qué número sigue? 7 13 25 49 ( )
23. ¿Qué grupo está fuera de lugar? afgh bfgh chij dfgh ( )
24. ¿Cuál es la letra que sigue en la sucesión: lmnnmlrsttsropq? ( )
25. ¿Qué número sigue? 2 3 5 7 9 11 13 ( )

Algunos ejercicios que pueden ser utilizados en la aplicación de pruebas pedagógicas

Objetivo: evaluar la dimensión capacidad intelectual en los estudiantes que aspiran a integrar el equipo de entrenamiento.

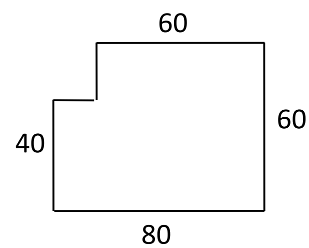
Nota: Si la prueba se considera de primer nivel (preguntas sencillas) su valor es 10 puntos, si la prueba se considera del segundo nivel (preguntas medias) su valor es de 15 puntos y si la prueba se considera de tercer nivel (preguntas con mayor complejidad) su valor es de 20 puntos.

En estas pruebas se pueden utilizar ejercicios como los que se muestran:

1. ¿Qué número se obtiene cuando se calcula 2005 – 205 + 25 – 2?

a) 1773 b) 1823 c) 1827 d) 1873 e) 2237

2. ¿Qué número debe ir en a para que la operación sea correcta?
   a) 9 b) 10 c)12 d)13 e)15
3. Se quiere cercar un terreno como el de la figura. En esa figura cada pareja de lados consecutivos son perpendiculares y las medidas de algunos lados se indican en metros. ¿Cuántos metros tienen que comprar?
   a) 140 b) 280 c) 320 d) 1800 e) 4800



4. En una competencia de fútbol hay 22 equipos. Cada uno enfrenta a cada uno de los otros 2 veces. ¿Cuántos juegos son disputados?

a) 462 b) 44 c) 42 d) 484 e) 231

5. En una competencia de fútbol un equipo obtiene 3 puntos por victoria, 1 punto por empate y ninguno por derrota. Después de 20 juegos de cada uno de los equipos uno de ellos ha ganado 8 juegos y perdido 8 juegos. ¿Cuántos puntos tiene?

a) 23 b) 25 c) 26 d) 27 e) 28

6. ¿Cuál es la amplitud del menor ángulo formado por las agujas del reloj a las 2pm?

a) 30º b) 45º c) 60º d) 75º e) 90º

7. Una alfombra cuadrada fue cortada en cuadrados menores de la siguiente manera: un cuadrado de $16cm^2$, cinco cuadrados de área $4,0cm^2$ cada uno y 13 cuadrados de área $1,0cm^2$ cada uno. ¿Cuál es la medida del lado de la alfombra antes de ser cortada?

a) 3,0cm b) 4,0cm c) 5,0cm d) 7,0cm e) 8,0cm

8. Un cubo de madera tiene 3,0cm de arista. Dos caras opuestas fueron pintadas de amarillo y las restantes de verde. El cubo fue dividido en 27 cubitos de arista 1,0cm. ¿Cuántos cubitos tienen aristas pintadas de los dos colores?

a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) 24

9. ¿Cuál de las expresiones de abajo tiene como resultado un número impar?

a) $5 + 7 + 2 + 3 + 1 + 22$

b) $12 + 48 + 76 + 33 + 1 + 25 + 115$

c) $7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

d) $52 + 32 + 66 + 124 + 333 + 2347 + 45678$

e) $265 + 228 + 688 + 125 + 33 + 45698 + 23456$

10. Se tienen cartones numerados del 1000 al 9999. Marcelo cogió todos en los cuales el dígito 7 apareciera exactamente 3 veces y el cero no apareciera. ¿Cuántos cartones cogió?

a) 32 b) 36 c) 45 d) 46 e) 48

11. Rosa y María comienzan a subir una escalera de 100 peldaños al mismo tiempo. Rosa sube 10 peldaños cada 15 segundos y María 10 cada 20 segundos. Cuando una de ellas llega al último escalón, ¿cuánto tiempo le faltará a la otra?

a) ½ minuto b) 40 segundos c) 45 segundos d) 50 segundos e) 1 minuto

12. Carlos y Juan comienzan a guardar monedas de 1 peso en enero de 2010. Todos los meses Carlos guarda 20 monedas y Juan 30 monedas. En julio de 2010 y los meses siguientes Carlos no guardó más

monedas y Juan siguió guardando sus 30 monedas por mes. ¿Al finalizar qué mes Juan tiene exactamente el triplo del número de monedas de Carlos guardadas?

a) agosto b) septiembre c) octubre d) noviembre e) diciembre

13. La suma de tres números enteros consecutivos es igual a 90. ¿Cuál es el mayor de esos números?

a) 21 b) 28 c)29 d)31 e)32

14. 20 personas alquilan un barco para un paseo por $200, lo cual se divide entre todos a partes iguales. El día del paseo algunas personas desistieron. Por causa de esto cada participante tuvo que pagar $15 de más. ¿Cuántas personas desistieron del paseo?

a)10 b)11 c)12 d)13 e)14

15. ¿Cuántos números enteros, múltiplos de 3 existen entre 1 y 2011?

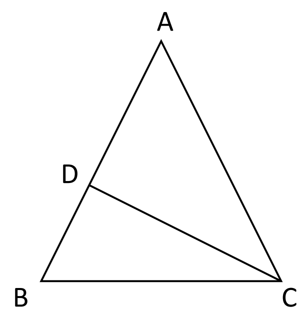
a) 667 b) 668 c) 669 d) 670 e) 671

16. Una caja contiene solamente bolas azules, verdes y blancas. El número de bolas blancas es el doble del número de azules. Si colocamos 10 bolas azules y retiramos 10 bolas blancas la caja pasará a contener el mismo número de bolas de cada color. ¿Cuántas bolas contiene la caja?

a) 30 b) 40 c) 60 d) 80 e) 90

17. Los triángulos ABC y BCD son isósceles de bases AB y BC, respectivamente y $\angle ABC = 40^\circ$. Calcula $\angle DCA$.

a) 45º b) 50º c) 60º d) 75º e) 90º

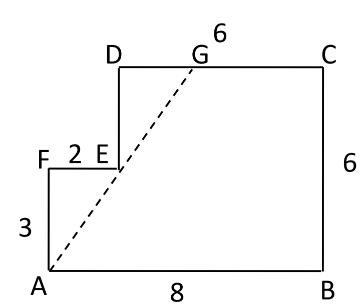


18. Dos meses atrás se comenzó la construcción de una escuela. El primer mes se hizo $\frac{1}{3}$ de la obra y el segundo mes $\frac{1}{3}$ de lo que faltaba. ¿Qué fracción de la obra falta?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$

19. La figura muestra un polígono en el cual dos lados consecutivos cualesquieras son perpendiculares. El punto G pertenece a CD y a la recta que pasa por A y E. Las medidas de algunos de los lados se indican a continuación. ¿Cuál es el área del polígono ABCG?

a) 36 cm^2 b) 37cm^2 c) 38cm^2 d) 39cm^2 e) 40cm^2



20. Se sabe que el número de bolas en una caja es mayor que 100 y menor que 140 y que exactamente una de las afirmaciones siguientes es verdadera:

Hay más de 100 y menos de 120

Hay más de 105 y menos de 130

Hay más de 120 y menos de 130

¿Cuántos posibles valores hay para el número de bolas dentro de la caja?

a) 1 b) 5 c) 11 d) 13 e) 16

21. Dos amigos parten de un punto P y caminan en direcciones que forman un ángulo de 60º, ambos a 6,0km/h. ¿Cuál es la distancia entre ellos 1 minuto después de la partida?

a) 80 mb) 90m c) 95m d) 100m e) 105m

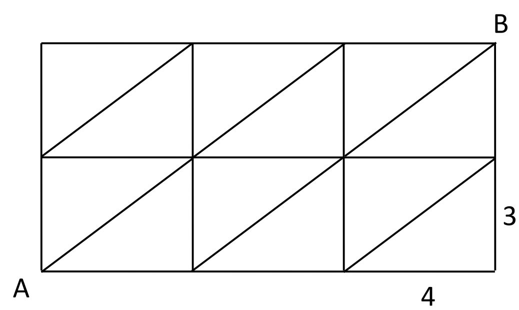
22. Se tiene la ecuación 2x2 – ax + 60 = 0 y se sabe que una de las raíces es 6. ¿Qué valor tiene a?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 20 e) 22

23. Los médicos recomiendan, para un adulto, 800 mg de calcio por día. Se sabe que 200 ml de leche contienen 296 mg de calcio. Cuando un adulto bebe 200 ml de leche, ¿cuál es el por ciento de la dosis recomendada de calcio que está injiriendo?

a) 17% b) 27% c) 37% d) 47% e) 57%

24. Una hormiga está en el punto A de la maya mostrada en la figura. La maya está formada por rectángulos de 3 cm de ancho por 4 de largo. Una hormiga solamente puede caminar sobre los lados o las diagonales de los rectángulos. ¿Cuál es la menor distancia que la hormiga debe recorrer para ir desde A hasta B?



a) 12cm b) 14cm c) 15cm d) 17cm e) 18cm

25. El segmento AB mide 21 cm de longitud. El punto P se coloca de forma que el cuadrado y el triángulo equilátero tengan el mismo perímetro. ¿Cuánto mide el segmento AP?

26. ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas dentro de un grupo de 9 si uno debe ser presidente, otro vicepresidente y el tercero el secretario?

27. Completa para que la operación sea correcta

<u>2 □□·□□</u>

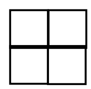
□□4

□61

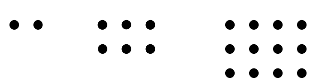
□□01

28. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número de tres cifras diferentes?
29. En la expresión 19631 = 3 · AMOR + 2, ¿qué dígito representa la letra A?
30. Se tiene una cuadrícula de 10 X 10, ¿cuántos cuadrados se observan?

    Ejemplo esta es de 2X2



31. En un aula hay 9 niños y 13 niñas. Se sabe que la mitad de la matrícula del aula están enfermos. ¿Cuál es el mínimo número de niñas enfermas?
32. En un saco hay palillos de 20 colores distintos. Al azar se van sacando palillos del saco. ¿Cuál es la menor cantidad de palillos que deben sacarse para garantizar que en la colección tomada hayan al menos 100 palillos del mismo color?
33. La suma de tres números impares consecutivos es 27. ¿Cuál es el número más pequeño de esos tres?
34. Rafael tiene 10 cartas con exactamente los números 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53 y 68 escritos en ellas. ¿Cuál es el menor número de cartas que debe elegir para que la suma de las escogidas sea 100?
35. ¿Cuál es el resultado de $99 - 97 + 95 - 93 + \dots + 3 - 1$?
36. Una sala de cine tiene 26 filas con 24 asientos cada una. El total de los asientos se enumera de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 375?
37. Observa la secuencia de figuras:



    ¿Cuántos puntos tiene la sexta figura?

38. Las filas y las columnas de un tablero de ajedrez 8X8 se numeran del 1 al 8. Un niño coloca en cada casilla tantas fichas como la suma de los números de la fila y la columna de esa casilla. ¿Cuántas fichas colocó el niño?
39. De los 200 estudiantes de una escuela 150 participaron en la olimpiada de Matemática y 130 en la de Física. ¿Cuántos estudiantes como mínimo participaron en ambas olimpiadas?

40. Considera todos los números de 4 dígitos compuestos por los dígitos 3, 4, 6 y 7. Organizados en cualquier orden y que ninguno se repita. ¿Cuántos de esos números son divisibles por 4?
41. Mientras Laura lee un libro, se da cuenta que el número de la página que está leyendo es divisible por 3, 4 y 5. ¿Cuál es el dígito de las unidades de la siguiente página?
42. Se sabe que la operación es correcta y que las letras representan dígitos diferentes. Calcula $A + B + C + D$.

$$\begin{array}{r} 8542 \\ -\ 2BAC \\ \hline D645 \end{array}$$

43. Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones, pero no puede avanzar a su antojo. Está obligado a subir un escalón cada día de los meses de orden impar y a bajar un escalón cada día de los meses de orden par. Comienza el primero de enero de 2001, ¿qué día quedará en libertad?
44. ¿Cuál es la suma de las cifras del número 1092 – 92?
45. En un garaje entre autos y motos hay 20 vehículos. Sabiendo que el número total de ruedas es 70, ¿cuántos autos hay?
46. ¿Cuánto hay que aumentar al numerador de la fracción $\frac{1}{8}$ para obtener $\frac{3}{2}$?
47. Un vaso con agua tiene una masa de 200g. Al tomarse la mitad del agua, el vaso y la otra mitad del agua tienen una masa total de 150g. ¿Cuál es la masa del vaso vacío?
48. ¿Cuántos números tiene la secuencia 0, 7, 14, 21, 28, …, 161?
49. ¿Cuánto vale cada caja si 110 cajas cuestan 11 pesos?
50. ¿Qué fracción es equivalente a $\frac{8}{14}$?
51. Si hoy digo que pasado mañana será viernes, ¿Qué día fue anteayer?
52. Un enfermo debe tomar una aspirina cada media hora. ¿En cuánto tiempo se tomará 10 aspirinas?
53. ¿Cuántos dígitos tiene el número N= 212.58?
54. ¿Cuál es la cantidad máxima de domingos que puede tener un año?
55. ¿De cuántas formas se pueden acomodar en línea recta 7 pelotas blancas y 5 negras de tal manera que no estén 2 pelotas negras juntas?

56. Si m y n son enteros positivos, cuál es el menor valor que puede tomar m si $2940 \cdot m = n^2$

57. En una selva hay algunas hienas, águilas y serpientes, cada mañana cada una de las hienas se come un águila, en la tarde, cada serpiente se come una hiena. Por la noche cada águila se come una serpiente. Al final del tercer día sólo queda un águila. ¿Cuántos animales de cada tipo había al principio del primer día?

58. En una gaveta que se encuentra en una habitación oscura hay 120 medias de cuatro colores diferentes. ¿Cuál es el número mínimo de medias que se deben extraer para asegurar que tenemos, al menos, un par de medias del mismo color?

Dado el producto

59. P= $(10+1)(10^2+1)(10^{2^2}+1)(10^{2^3}+1)\ldots(10^{2^{1989}}+1)$

Calcule P y exprese el resultado empleando la notación anterior.

60. El precio fijo que hay que pagar en un cierto país para montar en un taxi es \$2,50, además se debe pagar 10 centavos por cada 100m recorridos. Si tengo en el bolsillo \$10,00, ¿qué distancia puedo recorrer?

Pruebas pedagógicas de nivel superior

1. En un monasterio hay más de 50 monjes, todos ellos son expertos en lógica. Están todo el día cada uno en su celda, para la cena se reúnen en una mesa redonda donde se pueden ver las caras, cenan y vuelven a sus celdas, este es el único momento del día en que se ven. Han hecho voto de silencio, no pueden gesticular ni comunicarse de ningún modo y no hay espejos en el monasterio ni forma alguna de verse reflejado.
2. Un día, llega el padre prior y antes de empezar a cenar les dice: uno o más de ustedes han sido señalados por un ángel que les ha hecho una marca roja en la frente. Aquellos que tengan la marca deben salir en peregrinación en cuanto lo sepan. Luego el padre prior se marchó sin indicar quienes eran los elegidos. Tras 7 días, todos los monjes con la marca roja se dieron cuenta de que estaban señalados y solo ellos salieron en peregrinación. ¿Cuántos eran los monjes elegidos? ¿Cómo se dieron cuenta de ello?
3. Un jeque tiene que transportar 100 lingotes de oro de 1 kilo de peso cada uno. Para ello tiene 10 camellos y 1 vigilante para cada camello. Cada uno de estos camellos transporta 10 lingotes. Al final del viaje el confidente del jeque le dice que uno de los vigilantes le ha robado 1 gr. de oro por lingote de los 10 lingotes que ese vigilante transportaba, pero no sabe de qué vigilante se trata. ¿Cómo puede

adivinar el jeque qué vigilante le ha robado, sabiendo que sólo dispone de una báscula con la cual puede realizar una única pesada?

Nota: es una báscula y no una balanza. O sea, mide el peso exacto de lo que se coloca sobre ella.

4. En el sótano de una casa hay cuatro bombillos incandescentes y en el piso de arriba hay cuatro interruptores, uno para cada bombillo. Cuando accionamos un interruptor desde la casa, es imposible ver qué bombillo se ha encendido. Haciendo un solo viaje ¿cómo podemos saber qué interruptor enciende cada luz?
5. Mi tío Joaquín tiene que tomar una píldora de cada una de dos medicinas distintas cada día. El farmacéutico le dio un frasco de la medicina A, y un frasco de la medicina B, y dado que ambas píldoras tienen exactamente la misma apariencia, le recomendó que fuera cuidadoso y no las confundiera. Ayer noche puso sobre la mesa una píldora del frasco rotulado "A", y una píldora del frasco rotulado "B", cuando se distrajo por un momento y se dio cuenta que sobre la mesa había tres píldoras.Las píldoras son indistinguibles, pero contando las que quedaban en los frascos mi tío se dio cuenta que por error había dos píldoras del frasco "B", en lugar de una sola como le había recetado el médico. Es muy peligroso tomar más de una píldora por día de cada clase, y las píldoras son muy costosas como para descartarlas y tomar nuevas de los frascos. ¿Cómo hizo mi tío para tomar esa noche, y cada una de las noches siguientes, exactamente una píldora de cada clase?
6. Se marcaron en una recta 2011 puntos y se pintaron de rojo o azul. A continuación se pintaron los segmentos entre puntos consecutivos siguiendo las siguientes reglas:
   - Si los dos extremos son rojos, el segmento se pintó de rojo.
   - Si los dos extremos son azules, el segmento se pintó de azul.
   - Si los dos extremos son de colores distintos, el segmento se pintó de blanco.

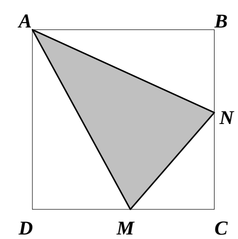
   Al finalizar hay 100 segmentos blancos y se sabe que el primer punto es rojo. Determina el color del último punto.
7. En una mesa hay 5 montones de fichas, cada una con 5 fichas. Dos personas A y B van a jugar por turnos, comenzando A. En cada turno el jugador debe retirar el número de fichas que quiera pero solamente de uno de los montones (por lo menos debe retirar una ficha), pierde el primero que no pueda jugar. ¿Cuál de los jugadores puede asegurar su triunfo y cómo debe jugar para lograrlo?
8. La tarea de Matemática del equipo formado por las personas A, B, C, D y E se resolvió de la siguiente manera: cada problema fue resuelto por exactamente 2 personas, A participó en la solución de un problema, B en 2, C en 2, D en 3 y E en 4. ¿Cuántos problemas tenía la tarea?

Pruebas que se pueden aplicar durante la preparación:

Nota: En la preparación se aplican pruebas contra reloj, individuales y colectivas. A continuación se ofrece una muestra de las mismas.

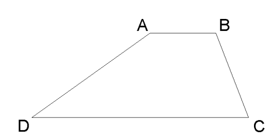
Contra reloj 1

1. Cuando se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, …, 2007, ¿cuál número ocupa el lugar 2007?
2. Un niño juega con tres dados y suma los números que aparecen en las caras que quedan hacia arriba. ¿Cuántos resultados diferentes puede obtener?
3. ¿Cuántos números enteros x satisfacen la inecuación $3 < \sqrt{x} < 7$?
4. El cuadrilátero ABCD es un cuadrado de área 4,0 m^2. Los puntos M y N dividen los lados en que se encuentran en dos segmentos de igual longitud. Determina el área del triángulo AMN.



Contra reloj 2

1. Determina con cuántos ceros consecutivos termina el número $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2007$
2. Pedro escribió un número en su calculadora, lo multiplicó por 3, sumó 12, dividió el resultado por 7 y obtuvo el número 15. ¿Cuál fue el número escrito por Pedro?
3. En un código secreto las 10 primeras letras del alfabeto representan los dígitos del 0 al 9, con la condición de que a cada letra le corresponda un único número y viceversa. Se sabe que d + d = f, d · d = f, c + c = d, c + d = a y a – a = b. Determina a + b + c + d.
4. En el trapecio de la figura se tiene que AB es paralelo a CD, AD = 10cm y CD = 15cm. Si el ángulo C mide 75º y el ángulo D mide 30º. ¿Cuánto mide el lado AB?



Contra reloj 3

1. Un estacionamiento para carros cobra \$1.00 por la primera hora y 75 centavos en cada hora o fracción de hora siguiente. Andrés estacionó su carro a las 11 horas y 20 minutos y lo saca a las 15 horas y 40 minutos. ¿Cuánto debe pagar por el estacionamiento?
2. ¿Qué número debemos sumar al numerador y restar al denominador de la fracción $\frac{1478}{5394}$ para transformarla en su inversa?
3. Determina la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$
4. Un rectángulo ABCD está dividido en cuatro rectángulos menores. Las áreas de 3 de los rectángulos está en la figura. ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?

Individual 1

1. Determina todos los pares de enteros (x, y) que satisfacen $6x^2y^2 - 4y^2 = 2012 - 3x^2$.
2. Prueba que para todos números reales a, b, c la siguiente desigualdad se verifica $\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-b+1)$
3. Sea ABC un triángulo obtusángulo en B, sean D y E los puntos medios de los segmentos AB y AC respectivamente, sea F un punto en BC tal que el ángulo BFE es de 90º, y sea G un punto en DE tal que el ángulo BGE mide 90º. Prueba que los puntos A, F, G son colineales si y solo si 2BF = CF.

Individual 2

1. Para un número primo p dado determina todos los enteros n tal que $\sqrt{n^2 + pn}$ es un entero.
2. Existen algunos enteros escritos en una pizarra, en cada paso dos números a y b son seleccionados y reemplazados por los números $3a - b$ y $13a - 3b$. Si al comenzar estaban escritos los números $1, 2, 3, \ldots, 2012$ en la pizarra, ¿es posible tener en la pizarra los números $2, 4, 6, \cdots, 4024$ después de un número finito de pasos?
3. Un triángulo con ortocentro H y centro de la circunferencia circunscrita O es dado. Si uno de los ángulos del triángulo es 60º, prueba que la bisectriz de ese ángulo es perpendicular a la recta OH.

Individual 3

1. Determina el mínimo número de colores requerido para pintar todos los puntos con coordenadas enteras en el plano de modo que ninguna pareja de puntos que estén a exactamente una distancia de 5 unidades sean del mismo color.
2. Dos circunferencias c y c1 con centros O y O1 son exteriores. Los puntos A, B y C están en la circunferencia c y los puntos A1, B1 y C1 están en la circunferencia c1 tal que AB || A1 B1, BC || B1 C1 y los ángulos ABC y A1B1C1 tienen la misma amplitud. Las rectas AA1, BB1 y CC1 son todas diferentes y se cortan en P, que no coincide con ningún vértice de los triángulos ABC y A1B1C1. Prueba que los ángulos AOB y A1O1B1 tienen la misma amplitud.
3. Sea a un número real, $0 \leq a \leq 1$ prueba que para cada entero no negativo n se verifica la desigualdad $(n+1)a \leq n + a^{n+1}$.

Colectiva 1

En un cuadrado de nxn, $n \geq 2$ los cuadrados unitarios con sus dos componentes impares (número de fila y número de columna que le corresponde a la casilla) son quitados. Determina el mínimo número de piezas rectangulares necesarias para cubrir exactamente la región restante sin solapamientos.

Nota: este es un problema que puede ser utilizado para prueba colectiva pues hay que realizar el análisis por separado para cuando n es par y cuando n es impar.

Colectiva 2

Sea ABC un triángulo, determina todos los posibles valores del ángulo A en los siguientes casos:

a) El área de ABC es $10\sqrt{3}$, AB = 8,0 cm y AC = 5,0 cm

b) AB = $5\sqrt{2}$, BC = $5\sqrt{3}$ y el ángulo C es 45º.

c) AB = $5\sqrt{2}$, BC = 5 y el ángulo C es 45º.

d) AB = $5\sqrt{2}$, BC = 10 y el ángulo C es 45º.

Nota: esta es otra posibilidad para los ejercicios que se pueden utilizar en pruebas colectivas, que tengan varios incisos que se puedan trabajar de forma independiente, para que cada uno de los miembros del equipo por las limitaciones de tiempo que tienen tengan que trabajar con uno de los incisos.

Colectiva 3

Sean x, y, z reales positivos, demuestra que:

a) si $x+y+z\geq 3$ se cumple que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 3$

b) si $x+y+z\leq 3$ se cumple que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3$

Nota: esta es similar a la anterior.

Colectiva 4

Encuentra todos los números reales m tal que la ecuación $\left(x^2-2mx-4(m^2+1)\right)\left(x^2-4x-2m(m^2+1)\right)=0$ tiene tres raíces diferentes.

Nota: este caso es diferente de los anteriores, pues en el después de factorizar la ecuación se conduce a resolver dos ecuaciones polinómicas $(x-m)^2=5m^2+4$ y $(x-2)^2=2(m^3+m+2)$, entonces en este caso los estudiantes deben analizar los dos casos por separado y después valorar los posibles valores de m.

Colectiva 5

Demostrar que $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k'1}$

Nota: este caso es diferente de los anteriores, pues para resolverlo es posible utilizar un conteo doble poniendo las relaciones de los dos miembros en dos situaciones reales y contando en cada una. En este caso las situaciones pudieran ser seleccionar de entre n estudiantes una brigada de k estudiantes en la que uno de ellos es el jefe y la otra forma sería seleccionar primero al jefe, de n formas y después seleccionar de entre los n-1 alumnos restantes. Entonces cada uno de estos análisis los puede realizar por separado una parte del equipo.