# MINISTERIO DE EDUCACIÓN

# EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

# PROGRAMAS DE ESTUDIO

# DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

## CARACTERIZACIÓN DEL ESTUDIANTE DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

El ingreso al nivel medio superior ocurre en un momento crucial de la vida del estudiante, es el período de tránsito de la adolescencia hacia la juventud.

Es conocido que los límites entre los períodos evolutivos no son absolutos y están sujetos a variaciones de carácter individual, de manera que el profesor puede encontrar en un mismo grupo escolar, estudiantes que ya manifiestan rasgos propios de la juventud, mientras que otros mantienen todavía un comportamiento típico del adolescente.

Esta diversidad de rasgos se observa con más frecuencia en los grupos de décimo grado y de primer año de la ETP, pues en los alumnos de años posteriores comienzan a revelarse mayoritariamente las características de la edad juvenil. Es por esta razón que se centra la atención en algunas características de la etapa juvenil, cuyo conocimiento resulta de gran importancia para los profesores de este nivel.

Muchos consideran el inicio de la juventud como el segundo nacimiento del hombre; entre otras cosas, ello se debe a que en esta época se alcanza la madurez relativa de ciertas formaciones y algunas características psicológicas de la personalidad.

En lo que respecta al desarrollo físico, es necesario señalar que, en la juventud, el crecimiento longitudinal del cuerpo es más lento que en la adolescencia; aunque comúnmente entre los 16 y 18 años ya los jóvenes han alcanzado una estatura muy próxima a la definitiva. También, en esta etapa es significativo el desarrollo sexual de los jóvenes; los varones, quienes respecto a sus compañeras habían quedado rezagados en este desarrollo, ahora lo completan.

En la juventud se continúa y amplía el desarrollo que en la esfera intelectual ha tenido lugar en etapas anteriores. Así, desde el punto de vista de su actividad intelectual, los estudiantes del nivel medio superior están potencialmente capacitados para realizar tareas que requieren una alta dosis de trabajo mental, de razonamiento, iniciativa, independencia cognoscitiva y creatividad. Estas posibilidades se manifiestan tanto respecto a la actividad de aprendizaje en el aula, como en las diversas situaciones que surgen en la vida cotidiana del joven.

Resulta necesario precisar que el desarrollo de las posibilidades intelectuales de los jóvenes no ocurre de forma espontánea y automática, sino siempre bajo el efecto de la educación y la enseñanza recibida, tanto en la escuela como fuera de ella.

En relación con lo anterior, la investigación dirigida a establecer las regularidades psicológicas de los escolares cubanos[1], en especial de la esfera clásicamente considerada como intelectual, ha revelado que en el desempeño intelectual, los alumnos del nivel medio superior alcanzan índices superiores a los del estudiantado de niveles anteriores, lo que no significa, desde luego, que ya en el nivel medio superior los alumnos no presentan dificultades ante tareas de carácter intelectual, pues durante la investigación se pudo constatar la existencia de estudiantes que no resuelven de un modo correcto los problemas lógicos, en situaciones que exigen la aplicación de procedimientos racionales y el control consciente de su actividad. No obstante, fue posible establecer que cuando la enseñanza se organiza de forma correcta, esos alumnos pueden superar muy rápido sus deficiencias, gracias a las reservas intelectuales que han desarrollado.

---

[1] Tomado de la investigación comenzada en el quinquenio 1985-1990 por el Departamento de Psicología Pedagógica, del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP).

En el nivel medio superior, como en los niveles precedentes, resulta importante el lugar que se le otorga al alumno en la enseñanza. Debe tenerse presente que, por su grado de desarrollo, los alumnos de la Educación Media Superior pueden participar de forma mucho más activa y consciente en este proceso, lo que incluye la realización más cabal de las funciones de autoaprendizaje y autoeducación. Cuando esto no se toma en consideración para dirigir el proceso de enseñanza, el papel del estudiante se reduce a asimilar pasivamente, el estudio pierde todo interés para el joven y se convierte en una tarea no grata para él. Gozan de particular respeto aquellas materias en que los profesores demandan esfuerzos mentales, imaginación, inventiva y crean condiciones para que el alumno participe de modo activo.

El estudio solo se convierte en una necesidad vital y, al mismo tiempo, es un placer cuando el joven desarrolla, en el proceso de obtención del conocimiento, la iniciativa y la actividad cognoscitiva independiente.

En estas edades es muy característico el predominio de la tendencia a realizar apreciaciones sobre todas las cosas, apreciación que responde a un sistema y enfoque de tipo polémico, que los alumnos han ido conformando, así como la defensa pasional de todos sus puntos de vista.

Las características de los jóvenes deben ser tomadas en consideración por el profesor en todo momento. A veces se olvidan estas peculiaridades de los estudiantes del nivel medio superior y se tiende a mostrarles todas las “verdades de la ciencia”, a exigirles el cumplimiento formal de patrones de conducta determinados; entonces, los jóvenes pueden perder el interés y la confianza en los adultos, pues necesitan decidir por sí mismos.

En la etapa juvenil se alcanza una mayor estabilidad de los motivos, intereses, puntos de vista propios, de manera tal que los alumnos se van haciendo más conscientes de su propia experiencia y de la de quienes lo rodean; tiene lugar así la formación de convicciones morales que el joven experimenta como algo personal y que entran a formar parte de su concepción moral del mundo.

Las convicciones y puntos de vista, empiezan a determinar la conducta y actividad del joven en el medio social donde se desenvuelve, lo cual le permite ser menos dependiente de las circunstancias que lo rodean, ser capaz de enjuiciar críticamente las condiciones de vida que influyen sobre él y participar en la transformación activa de la sociedad en que vive.

El joven, con un horizonte intelectual más amplio y con un mayor grado de madurez que el niño y el adolescente, puede lograr una imagen más elaborada del modelo, del ideal al cual se aspira, lo que conduce en esta edad, al análisis y la valoración de las cualidades que distinguen ese modelo adoptado.

En tal sentido, es necesario que el trabajo de los profesores, tienda no solo a lograr un desarrollo cognoscitivo, sino a propiciar vivencias profundamente sentidas por los jóvenes, capaces de regular su conducta en función de la necesidad de actuar de acuerdo con sus convicciones. El papel de los educadores como orientadores del joven, tanto a través de su propia conducta, como en la dirección de los ideales y las aspiraciones que el individuo se plantea, es una de las cuestiones principales a tener en consideración.

De gran importancia para que los educadores (familiares y profesores) puedan ejercer una influencia positiva sobre los jóvenes, es el hecho de que mantengan un buen nivel de comunicación con ellos, que los escuchen, los atiendan y no les impongan criterios o den solamente consejos generales, sino que sean capaces de intercambiar con ellos ideas y opiniones.

Resulta importante, para que el maestro tenga una representación más objetiva de cómo son sus alumnos, para que pueda aumentar el nivel de interacción con ellos y, al mismo tiempo, ejercer la mejor influencia formadora en las diferentes vertientes que los requieran, que siempre esté consciente del contexto histórico en el que viven sus alumnos.

La función de los educadores es exitosa sobre todo cuando poseen un profundo conocimiento de sus alumnos. En el caso específico de la comunicación óptima con los estudiantes, es fundamental el conocimiento acerca de sus preferencias comunicativas, de los temas que ocupan el centro de sus intereses y constituyen el objeto de las relaciones de los alumnos entre sí, y con otras personas.

En investigaciones especialmente diseñadas para conocer las preferencias comunicativas de los jóvenes y encaminadas a profundizar en las regularidades psicológicas de los escolares cubanos, se puso de manifiesto que en la actualidad los temas de conversación más frecuentes entre los alumnos del nivel medio superior están relacionados con el amor y el sexo, el tiempo libre y la recreación, los estudios y su proyección futura.

En particular, la elección de la profesión representa una cuestión muy importante para el desenvolvimiento y las aspiraciones futuras del joven. Esta selección se convierte en el centro psicológico de la situación social, del desarrollo del individuo, pues es un acto de autodeterminación que presupone tomar una decisión y actuar en concordancia con algo lejano, lo que requiere cierto nivel de madurez.

El joven siente una fuerte necesidad de encontrar su lugar en la vida, con lo cual se incrementa su participación en la actividad socialmente útil (estudio, deporte, trabajo, político-organizativa, cultural), en la que se mantiene gran valor para él la comunicación con su grupo de coetáneos, las relaciones con sus compañeros, la aceptación y el bienestar emocional que logre obtener.

No obstante, la importancia de la opinión del grupo, el joven busca fundamentalmente, en esta comunicación con sus iguales, la relación personal, íntima, de amistad, con compañeros hacia los que siente confianza, y a los que le unen afinidad de intereses y criterios sobre diferentes aspectos. Por esto surgen subgrupos, parejas de amigos y también, sobre esta base, relaciones amorosas con un carácter más estable que las surgidas en la adolescencia.

De gran importancia son, entre las relaciones con los compañeros y amigos, las relaciones amorosas. En este tipo de relación se materializan los ideales sobre la pareja y el amor, así como las opiniones y experiencias que hayan logrado acerca de las relaciones sexuales, el matrimonio y las responsabilidades que esto trae para ambos sexos.

En este sentido, la influencia de los educadores puede resultar muy importante y se logra promoviendo conversaciones y discusiones, aconsejando con tacto y visión de futuro cuando se presentan conflictos y dificultades. Es preciso partir de la relación afectiva en que se encuentran los alumnos en estos momentos, llegar a ellos y comprenderlos, para poder entonces orientarlos y encauzarlos sin que se sientan censurados y criticados, lo que implicará un alejamiento del adulto.

Esto es particularmente importante al abordar temas como el del alcoholismo, el tabaquismo, las drogas, la promiscuidad y la prostitución. En este sentido, es conveniente aprovechar el debate que se provoque a raíz de la discusión de materiales, como por ejemplo, los de naturaleza audiovisual que hoy están a nuestra disposición, para compartir vivencias y elaborar valoraciones personales sobre estos problemas.

Especial atención requieren los casos de parejas que surgen en la misma aula, ya que la posición de estos alumnos es delicada. Cualquier señalamiento debe hacerse con sumo cuidado por cuanto les afecta más por estar presente el otro miembro de su pareja. Hay factores sociales ligados a esta problemática que deben ser analizados con los jóvenes, de manera tal que le propicie la imagen de lo más adecuado para su edad (la no interrupción de sus estudios, la participación de ambos sexos en tareas y responsabilidades), no les reste, sino por el contrario, enfatice su capacidad para disfrutar del ensueño y valor espiritual de esta relación.

Analizando las relaciones interpersonales entre los alumnos y la fundamentación que hacen de por qué aceptan o rechazan a sus compañeros, encontramos que ellos se prefieren por la vinculación personal que logren entre sí, como resultado de la aceptación y la amistad que establezcan con un destacado carácter recíproco: "confían en mí y yo en ellos", "nos ayudamos".

Se destaca también el valor de las relaciones en el grupo en virtud de determinadas cualidades de la personalidad como: exigencia, combatividad, sinceridad, justeza. Aparecen en estas edades expresiones que encierran valoraciones de carácter humanista como: "lo prefiero por su actitud ante la vida, por su forma de pensar".

Al igual que en la adolescencia, el contacto con los demás refuerza su necesidad de autorreflexión, de conocerse, valorarse y dirigir, en cierta medida, su propia personalidad. Es importante que, en este análisis, el joven alcance cierto grado de autoestimación, de aceptación de su personalidad, a lo cual pueden contribuir los adultos, padres y profesores, las organizaciones estudiantiles en sus relaciones con él y, sobre todo, en las valoraciones que hacen de él. El joven necesita ayuda, comprensión, pero también busca autonomía, decisión propia y debe permitírsele que lo haga.

El joven encuentra una forma de manifestarse y de canalizar sus preocupaciones a través de las organizaciones estudiantiles. Solo a partir de su toma de conciencia en relación con las dificultades existentes en el proceso docente - educativo y de su participación activa en la toma de decisiones, es posible lograr las transformaciones que se aspiran en este nivel de enseñanza. Un objetivo esencial será lograr la auto dirección por parte de los propios jóvenes, en lo cual desempeñará una función esencial la emulación estudiantil.

Todo esto exige del educador plena conciencia de su labor orientadora y la necesidad de lograr buenas relaciones con el joven, basadas en el respeto mutuo, teniendo en cuenta que este es ya un individuo cercano al adulto con criterios relativamente definidos.

En todo este proceso el adolescente y el joven, necesitan una adecuada dirección. Corresponde a los adultos que los rodean ofrecer todo eso en forma conveniente, para que redunde en beneficio de su personalidad en formación y con ello se logre uno de los objetivos centrales de la educación socialista: la formación comunista de las nuevas generaciones.

# MATEMÁTICA

# 10$^{no}$

**CARACTERIZACIÓN DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA**

La Educación Preuniversitaria, como última fase del subsistema de Educación General, tiene como misión elevar la calidad del proceso de enseñanza– aprendizaje dirigido a lograr una cultura general integral de los estudiantes, y contribuir a su preparación para enfrentar exitosamente los estudios del nivel superior o dotarlos de óptimas posibilidades para desenvolverse satisfactoriamente en otros estudios, así como en la actividad laboral.

La enseñanza de la Matemática en el preuniversitario pretende lograr que los estudiantes comprendan la función de la actividad científico–técnica contemporánea en la sociedad actual, a partir de la resolución y formulación de problemas que requieran de conocimientos y el desarrollo de habilidades, hábitos, cualidades, convicciones y actitudes, relativos al trabajo con la matemática elemental.

Se requiere entonces de un egresado con conocimientos profundos de las distintas ciencias, con pleno desarrollo de sus capacidades, hábitos y habilidades para alcanzar la independencia en la actividad cognoscitiva, lo que contribuirá a que los conocimientos que obtengan a lo largo de la vida sean más sólidos y profundos.

Este egresado debe poder exponer sus argumentos de forma coherente y convincente a partir del dominio de la simbología y terminología matemáticas y de un adiestramiento lógico – lingüístico como premisa para su mejor desenvolvimiento en todos los ámbitos de su actividad futura.

Esto le debe permitir procesar datos, estimar y determinar cantidades y cantidades de magnitud que se requieren para resolver una problemática determinada, representar situaciones propias de diferentes contextos mediante modelos analíticos o gráficos, extraer conclusiones a partir de esos modelos y realizar demostraciones o refutaciones de proposiciones matemáticas utilizando los recursos matemáticos y de las tecnologías de la informática y la comunicación que le permitan apropiarse de métodos y procedimientos de trabajo de las ciencias.

La preparación y motivación adquirida en la asignatura y la orientación profesional recibida deben propiciar que en su elección de una carrera universitaria pueda conjugar sus intereses individuales con los sociales al atender a las necesidades vitales para el desarrollo del país.

El programa de la asignatura Matemática logra una concepción unitaria a partir de las líneas directrices, principios sobre los que se sustenta el análisis de la selección y ordenamiento de la materia de las unidades en los programas de los diferentes grados del nivel. Sin embargo, para cumplir la misión de la asignatura se requiere de un cambio en el orden de la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje y en el enfoque metodológico general de la asignatura que asuma lo resultados de las investigaciones científicas y experiencias de avanzada en el campo de las Ciencias de la Educación y de la Didáctica de la Matemática.

Para orientar dicha articulación en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido de la asignatura y las transformaciones en el enfoque metodológico se han precisado los lineamientos de trabajo en las educaciones que se deben implementar desde cada actividad de trabajo metodológico, para que el proceso de enseñanza -aprendizaje de la Matemática alcance la calidad requerida.

1. Contribuir a la educación político – ideológica, económico – laboral, científico – ambiental y estética de los alumnos, mostrando cómo esta permite la obtención y aplicación de conocimientos a la vida, la ciencia, la técnica y el arte, posibilita

comprender y transformar el mundo, y ayuda a desarrollar valores y actitudes acordes con los principios de nuestra Revolución.

Se garantiza desde la preparación de la asignatura a partir de la determinación de las categorías didácticas de la clase y las tareas que favorecen el desarrollo de cualidades, convicciones, puntos de vista y actitudes positivas.

a) En relación con la determinación de los objetivos y contenidos:

- Se requiere valorar situaciones de la vida, la ciencia, la técnica y el arte que desde el punto de vista educativo se pueden introducir, en correspondencia con su aplicación en los contenidos, al planificar la unidad, el sistema de clases y la clase.
- En la selección y diseño de las tareas se requiere incluir algunas que exijan la formulación y resolución de problemas que permitan hacer inferencias sobre situaciones de la realidad de carácter político-social, económico-laboral, científico-ambiental o estético y que demuestren la utilidad del contenido matemático que se estudia.

b) En relación con la determinación de los métodos, procedimientos, medios y formas de organización y evaluación:

- Es necesario prever la implicación de los estudiantes en la búsqueda de información en diferentes fuentes, que requieran la interpretación de tablas, gráficos y expresiones lingüísticas en que intervienen los conceptos y relaciones matemáticos que se estudian.
- Exigir en la realización de las tareas y su evaluación la argumentación como vía para llegar a encontrar las razones del “por qué” o “la causa de” o “el para qué ocurre”, lo que permite interiorizar la utilidad del contenido que se aprende y la importancia de una cultura matemática. Para lograrlo, los estudiantes tienen que ampliar, profundizar aplicando los conocimientos; buscar, comparar, integrar y expresar las ideas, que sustentan la veracidad o conformidad o falsedad de un juicio sobre un hecho, objeto, fenómeno o proceso; establecer relaciones y tomar posiciones, lo que contribuye a la formación de convicciones.
- Propiciar el establecimiento de relaciones de ayuda mutua entre los estudiantes. Potenciar, el desarrollo de valores como la responsabilidad, la laboriosidad y la honestidad a través del desarrollo de las tareas y el desarrollo de actitudes como la curiosidad científica, el espíritu crítico y autocrítico, entre otras.
- Promover el interés por la asignatura a través de trabajos investigativo y trabajos prácticos, exposiciones de aspectos históricos y del desarrollo de la Matemática, concursos de conocimientos, festivales de clases, la utilización de asistentes matemáticos, la celebración de conferencias y conversatorios con profesores y especialistas, la participación en el “Concurso por la cultura matemática”, entre otras actividades.
- Al promover la actividad con el movimiento de monitores y las sociedades científicas de Matemática, como las que se sugieren comentar aspectos de la historia y la cultura de la matemática, ubicando hechos y personalidades en su contexto geográfico, político, social y cultural, el debate de películas y documentales.
- Utilizar estos espacios como recurso para fortalecer la orientación profesional y con ello, la percepción de la utilidad social de la matemática, de su enseñanza y de la actividad de los científicos para el desarrollo económico, político y social del país.

2.Plantear el estudio de los nuevos contenidos matemáticos en función de resolver nuevas clases de problemas, de modo que la resolución de problemas no sea sólo un medio para fijar, sino también para adquirir nuevos conocimientos, sobre la base de un concepto amplio de problema.

El eje central del trabajo con los contenidos de la asignatura lo constituye **la formulación y resolución de problemas**, pero de manera tal que ellos no sirvan solo para la fijación (repaso, ejercitación, sistematización, profundización y aplicación) del saber y el poder matemático, sino también para adquirir nuevos conocimientos.

Es importante considerar la forma en que se estructuran los contenidos, pues estos se reactivan mejor en función de la resolución de problemas si están bien estructurados y si la persona tiene un vínculo motivacional - afectivo con ellos. En este sentido hay que tener en cuenta que hay ciertas habilidades intelectuales y matemáticas que se llevan de frente en todas las unidades temáticas y determinan ciertas clases de problemas que se deben tomar en consideración en todas ellas, pues lo único que varía en cada una son los recursos matemáticos que se emplean para resolverlos.

Sobre esta base se puede presentar a los estudiantes, al inicio de cada subunidad temática, un sistema de problemas, pertenecientes a estas clases de problemas, que resulten significativos para ellos y les permita revelar sus conocimientos e ideas previas y tener una percepción global del nuevo contenido. Tras esta presentación inicial, los estudiantes, orientados por el profesor, podrán apropiarse de los nuevos conceptos, relaciones y procedimientos en la medida que busquen la solución a estos problemas.

3. Potenciar el desarrollo de los alumnos hacia niveles superiores de desempeño cognitivo, a través de la realización de tareas cada vez más complejas, de carácter interdisciplinario, y el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y la creatividad.

Para potenciar el desarrollo de los estudiantes y el tránsito de la dependencia a la independencia cognoscitiva y la creatividad <u>se requiere que incluso aquellos estudiantes que tengan más dificultades realicen ejercicios variados, sin descartar que puedan desarrollar modelaciones y argumentaciones</u>. Por ejemplo, si se quiere que los estudiantes sean capaces de asimilar un procedimiento, no se puede hacer al margen de que comprendan sus significados a partir de los conceptos a asociados, las propiedades y relacionan que los caracterizan, su relación con otras áreas Matemáticas, de manera que puedan accionar en una variedad de situaciones en que tengan que modelar, argumentar, pasar de una forma de representación a otra de los números y comunicar sus resultados.

Por este motivo se recomienda integrar a los sistemas de clases tareas que respondan a los diferentes niveles de desempeño de los estudiantes, tomados de los libros de texto, orientaciones metodológicas, cuadernos, folletos, teleclases, el software educativo y el portal CUBAEDUCA, y otros materiales y libros que se pueden aprovechar para el trabajo con los estudiantes más aventajados.

Los centros provinciales de entrenamiento deben desempeñar una función importante en la preparación para los concursos de Matemática en la Educación Preuniversitaria y el resto de las educaciones con el apoyo de los miembros de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación y exconcursantes de Olimpiadas Internacionales y miembros de la preselección nacional y provincial, quienes además pueden brindar sesiones de entrenamiento a nivel de varios municipios cercanos.

4. Propiciar la reflexión, el análisis de los significados y formas de representación de los contenidos, el establecimiento de sus relaciones mutuas y la valoración de qué métodos de resolución son adecuados y la búsqueda de los mejores, dando posibilidades para que los estudiantes elaboren y expliquen sus propios procedimientos.

El desarrollo de la comprensión matemática tiene que ver con la posibilidad de establecer relaciones entre los contenidos matemáticos y sus significados, con la utilización y construcción de representaciones y con la capacidad de transferir sus conocimientos ante una situación desconocida. Por eso se debe asegurar la comprensión matemática de los estudiantes tanto a través de las tareas que se propongan cómo de la forma de desarrollarlas, por cuanto la comprensión emerge de las acciones que realizan los estudiantes en el proceso de resolución de tareas.

Las tareas deben poner al descubierto las ideas previas de los estudiantes, o dicho con otras palabras, lo que traen los estudiantes a la situación de aprendizaje y además deben ser variadas.

Por otra parte, se deben aprovechar las potencialidades de los métodos para promover un nivel de asimilación productivo de los conocimientos, para que los estudiantes se interesen por la resolución de problemas y aprendan a razonar. Es importante que se evidencie cómo hacer consciente en el estudiante el empleo de los recursos de búsqueda empleados (procedimientos heurísticos) para que se apropien de ellos conscientemente. La utilización de impulsos adecuados de la mayor generalidad posible, atendiendo al principio de los impulsos descendentes, ayuda a que los estudiantes sean capaces de resolver las tareas por sí mismos.

Es necesario propiciar que los estudiantes expresen sus ideas haciendo un uso adecuado de la lengua materna y la terminología y simbología matemáticas para evaluar posibles vías de solución, recursos que han sido útiles, errores más frecuentes y sus causas, entre otros elementos.

Se debe atender también a los estilos de aprendizaje de los estudiantes (si son activos o pasivos, si prefieren estudiar solos o con otros, si son analíticos o prácticos, planificados, o poco planificados, rápidos o lentos en el desarrollo de las actividades, interesados o no en aplicar los contenidos, si son espontáneos o reflexivos, metódicos o desordenados, decididos o poco decididos, entre otros aspectos).

Debe favorecerse que los estudiantes autocontrolen y regulen su trabajo, a través de la estimación, la búsqueda de contraejemplos, el análisis de casos particulares, la realización de un gráfico, la repetición de las acciones realizadas en sentido inverso, entre otras posibilidades.

Se requiere la autovaloración de lo realizado, que se evalúen las diferentes vías de solución y se determinen las más adecuadas, que el estudiante sea consciente de qué aprendió, cómo lo logró, qué barreras encontró, cómo las venció, por qué se le presentaron estas, cómo podía evitarlas, qué le agradó de lo que hizo o qué no le gustó, entre otras valoraciones.

5. Sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, tratando además que se integre el saber de los estudiantes procedente de distintas áreas de la Matemática e incluso de otras asignaturas.

La exigencia de sistematizar los contenidos dentro de cada unidad, grado y nivel implica establecer nexos y relaciones de precedencia y consecuencia entre los contenidos estudiados para ordenarlos y estructurarlos, comprender conscientemente las analogías y diferencias, diferenciar lo esencial de lo no esencial, interiorizar cómo al variar ciertas condiciones se tienen casos particulares de objetos y procesos conocidos y apreciar las ventajas de resolver una tarea por una u otra vía.

La integración de las diferentes áreas matemáticas, tanto en el tratamiento del nuevo contenido como en el proceso de fijación, posibilita que los estudiantes concienticen las relaciones entre ellas y las formas de pensar y proceder que les son inherentes. Además posibilita el repaso inmanente de los contenidos.

En consecuencia, a los efectos de lograr la integración y sistematización de los contenidos se requiere del entrelazamiento de las líneas directrices (dominios numéricos; magnitudes; trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas; funciones; geometría; pensamiento combinatorio y probabilístico y tratamiento de datos/estadística) y del poder, tanto de carácter general, como formular y resolver problemas, como de carácter específico, como argumentar matemáticamente, modelar, comunicarse empleando la terminología y simbología matemática o utilizar recursos y técnicas para la racionalización del trabajo mental y práctico.

Es conveniente que los estudiantes elaboren resúmenes y tablas estableciendo relaciones de subordinación y diferenciación entre conceptos o especificando los procedimientos que se pueden utilizar para resolver ciertas clases de tareas. También se puede recomendar que los estudiantes redacten informes sobre las definiciones de un concepto o pasos de un procedimiento y expliquen cómo se aplican en diferentes contextos.

6. Realizar el diagnóstico sistemático de los conocimientos, habilidades, modos de la actividad mental, y de las formas de sentir y actuar de los alumnos, valorando en cada caso cuáles son las potencialidades y las causas de las dificultades de estos, de modo que se propicien acciones de autocontrol y autovaloración y se obtengan aprendizajes de los errores.

En relación con el seguimiento del diagnóstico a veces se exige a los estudiantes con dificultades que realicen tareas de un mismo tipo, de carácter rutinario, que no siempre propician su desarrollo, y se pretende que asimilen los contenidos sobre la base de la explicación reiterada del profesor. Sin embargo, es mejor:

- Proponer tareas variadas a todos los estudiantes de acuerdo con su grado de desarrollo, teniendo en cuenta que las habilidades y capacidades cognitivas se desarrollan íntimamente relacionadas.
- Analizar previo a la clase cómo puede desarrollarse el proceso de orientación a partir de las exigencias de la tarea y el desarrollo de los estudiantes.
- Trabajar en la comprensión de los enunciados, al adiestrar a los estudiantes en la reformulación y crítica de enunciados y en la formulación de preguntas a partir de un enunciado dado.
- Lograr que los estudiantes superen sus dificultades a través de sus propias acciones, al provocar contradicciones que les hagan comprender la inconsistencia de estas en un clima de confianza, de sanas expectativas, en que se estimule el esfuerzo, el autocontrol y la autovaloración.
- Organizar el aprendizaje individual y cooperado, diferenciar los momentos de evaluación de los que no lo son, observar a los estudiantes en todas las actividades, revisar sus libretas y cuadernos, realizar repasos y consultas, entrevistar a los estudiantes y a las personas de su entorno familiar y escolar para profundizar no sólo en lo que saben o no, sino también en sus intereses, su estilo motivacional, su disposición hacia el aprendizaje, la forma en que aprenden, su ritmo de aprendizaje, las relaciones con el medio familiar, social y natural y las orientaciones valorativas a las que se subordinan sus actitudes y conductas.
- Exigir que en las libretas se escriban las explicaciones que dan otros estudiantes o el profesor en la pizarra, que se explique el por qué de un posible error o se tome nota de aquello en lo que se debe tener cuidado para no equivocarse en próximas ocasiones.

- Asumir que en el enunciado de cada ejercicio de Matemática, aunque no se declare, está implícita la exigencia de argumentar y desarrollar habilidades en la comunicación matemática de los estudiantes.
- Utilizar formas de control y autocontrol dirigidas tanto al proceso de resolución de las tareas como sus resultados. Controlar solamente si son correctos o no los resultados, sin conocer cómo los estudiantes proceden para encontrarlos, es una de las debilidades en la dirección del proceso de aprendizaje que conduce a la consolidación de concepciones, metáforas o creencias erróneas sobre el contenido de enseñanza.
- Trabajar en función del Programa Director de Matemática, al propiciar que las distintas disciplinas asuman su responsabilidad en el logro de aquellos objetivos que se pueden potenciar dentro de cada una de ellas, atendiendo al diagnóstico de los estudiantes.

7. Planificar, orientar y controlar el trabajo independiente de forma sistémica, variada y diferenciada, que les permita desarrollar habilidades para la lectura, la búsqueda de información, la interpretación de diversas fuentes, el trabajo cooperado y la argumentación y comunicación de sus ideas, en un adecuado clima afectivo donde haya margen para el error.

La planificación, orientación y control del trabajo independiente de forma sistémica, variada y diferenciada debe estimular el desarrollo de los estudiantes, de modo que se planteen metas y objetivos de aprendizaje y se estimule la autorregulación de su actividad.

- Las tareas para el trabajo independiente a desarrollar en las clases y en la actividad extraclase, tienen que ser suficientes, variadas y diferenciadas, en tanto consideran las clases de problemas previamente determinadas, los diferentes niveles de desarrollo de los estudiantes, los aspectos de orden educativo que interesa considerar y el tiempo (a corto, mediano y largo plazo ) que van a tener los estudiantes para realizar las tareas, entre otros aspectos.
- La variedad de las tareas debe atender a los posibles significados, las relaciones implicadas, su forma de representación, su estructura lógica y su contexto intra- o extramatemático. Deben propiciar que los estudiantes desarrollen su capacidad para formular y resolver problemas y además, se capaciten para:
  - Argumentar matemáticamente (explicar el proceso seguido en la resolución de un ejercicio, fundamentar una respuesta, reconocer relaciones, formular una conjetura, dar razones sobre su validez, demostrar un teorema, evaluar un razonamiento)
  - Modelar (precisar una situación, elaborar o interpretar un modelo, realizar, validar y evaluar el modelo).
  - Utilizar diversas representaciones de objetos matemáticos (poder trabajar con representaciones de objetos matemáticos y transferir de una forma a otra de representación, digamos de la gráfica a la numérica, simbólica, verbal u otra).
  - Operar con conceptos (identificar, ejemplificar, clasificar, definir, limitar o generalizar conceptos).
  - Comunicarse utilizando la terminología y simbología matemática (expresar de forma oral o escrita o visual ideas, comprender y evaluar textos o expresiones matemáticas, lo que incluye comprender críticas y someter a crítica las ideas de otros).
  - Utilizar recursos y técnicas para la racionalización del trabajo mental (utilizar con sentido tablas, calculadoras, asistentes matemáticos y otros medios heurísticos;

aplicar conscientemente procedimientos heurísticos y seleccionar, utilizar, modificar y crear algoritmos).

8. Proyectar la evaluación en correspondencia con los objetivos del nivel, el grado y las unidades y como proceso continuo que promueva la discusión de alternativas y procedimientos para la solución de tareas docentes, con el empleo de la crítica y la autocrítica como método habitual para la evaluación de los compañeros y la propia auto-evaluación.

La evaluación, como proceso continuo que debe cumplir variadas funciones, debe contribuir a que los estudiantes perciban su utilidad y se estimulen a continuar esforzándose, no para aprobar o sacar buenas notas, sino para aprender. Para esto es importante:

- Evaluar no solo el estado actual, sino las potencialidades de los educandos, lo cual requiere que la evaluación sobrepase el nivel reproductivo; atender a la integralidad de lo que debe ser evaluado (no solo lo cognitivo) y a la diversidad de los estudiantes, utilizando variadas formas de evaluación.
- Orientar a los estudiantes acerca de los objetivos de la evaluación, cómo se deben preparar, cómo y cuándo se van a evaluar, qué criterios, parámetros e indicadores se van a utilizar. Esto fortalece la autoconciencia del alumno, que se reconoce sujeto de su aprendizaje y sienta las bases para la autoevaluación y coevaluación.
- Comunicar y orientar los resultados de la evaluación dentro de los marcos de la ética y el respeto mutuo a los estudiantes y demás agentes educativos, profundizando en las posibles causas de las dificultades, para que puedan incidir favorablemente en el mejoramiento de su actividad de estudio.
- Propiciar el intercambio de criterios, la autoevaluación, y la coevaluación, a partir de la autovaloración sistemática del trabajo realizado y el ejercicio de la crítica y la autocrítica.
- Velar por la calidad y el carácter sistemático del control, de manera de poder garantizar la retroalimentación continua de los avances de los estudiantes, así como del diseño y la marcha del proceso, para inferir, en particular, la forma en que surten efecto las estrategias pedagógicas del profesor.

9. Utilizar las tecnologías, incluidas las de la informática y la comunicación, con el objetivo de adquirir conocimientos y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos.

Para la preparación, autopreparación del docente y elaboración de las clases, se deben utilizar sobre todo **los libros de texto**, tanto para la elaboración como para la fijación del contenido. También se deben aprovechar otros medios a disposición de los estudiantes, como los juegos con instrumentos de trazado, sin contar los que se puedan elaborar por el propio maestro o profesor como por sus estudiantes. Además se deben utilizar las vídeo clases, los videos metodológicos y las oportunidades del software educativo de la Colección “Futuro”, los asistentes matemáticos como GeoGebra y de CUBAEDUCA. Se recomienda asimismo utilizar el simulador de funciones del software “Eureka” para el trabajo con funciones y el sistema de aplicación “Excel” para el trabajo con la Estadística.

## OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA EN EL NIVEL PREUNIVERSITARIO

- Demostrar una concepción científica del mundo y una cultura político – ideológica, jurídica, económica y tributaria a través del modo en que se argumentan y aplican los conocimientos matemáticos.
- Adoptar decisiones responsables en su vida personal, familiar y social sobre la base de la comprensión de las necesidades vitales del país, la aplicación de procesos del pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo y la utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva y las probabilidades, la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría.
- Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científico-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas, así como procedimientos de la estadística descriptiva y las probabilidades a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la cultura económica y tributaria, la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.
- Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve.
- Exponer sus argumentaciones de forma precisa, coherente, racional y convincente a partir del dominio de la simbología y terminología matemática, como base para su mejor desenvolvimiento en todos los ámbitos de su actividad futura.

**OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA EN EL GRADO**

- Manifestar una concepción científica del mundo una cultura político – ideológica, jurídica, económica y tributaria a través de la interpretación del papel jugado por distintos problemas en determinados momentos histórico – concretos y la comprensión de la función de la actividad científico – técnica contemporánea en la sociedad actual.
- Afirmar la orientación vocacional a partir de la motivación alcanzada en la asignatura y de la relación de esta con otras ciencias, sus principales aplicaciones tecnológicas y las implicaciones para la sociedad, atendiendo en su elección a las necesidades vitales para el desarrollo del país.
- Procesar datos sobre el desarrollo económico, político y social en Cuba y en otras regiones y sobre problemas científico-ambientales para valorar la obra del socialismo y las consecuencias de políticas científicas y tecnológicas, utilizando, conceptos, relaciones, procedimientos y recursos propios de la estadística descriptiva, el trabajo con números reales, las ecuaciones, las funciones, la geometría y la trigonometría.
- Estimar y calcular cantidades, relaciones de proporcionalidad, longitudes, áreas y volúmenes, incógnitas y parámetros para proyectar y ejecutar actividades prácticas, así como para resolver problemas relacionados con hechos y fenómenos sociales, científicos y naturales y económicos, utilizando su saber acerca de los números reales, las magnitudes, las relaciones funcionales, las ecuaciones, la estadística descriptiva, la geometría y la trigonometría.
- Representar situaciones de la práctica, la ciencia o la técnica mediante modelos analíticos y gráficos y viceversa, extraer conclusiones a partir de esos modelos

acerca de las propiedades y relaciones que se cumplen en el sistema estudiado, aplicando para ello los conceptos, relaciones y procedimientos relativos al trabajo con los números reales, las variables, las ecuaciones algebraicas, las funciones racionales, la estadística descriptiva, la trigonometría y su aplicación a la geometría plana y al cálculo de cuerpos.

- Resolver y formular problemas de búsqueda y demostración de proposiciones matemáticas, así como relacionados con el desarrollo económico, político y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científico-ambientales, económicos utilizando los recursos aritméticos, algebraicos, estadísticos, geométricos y trigonométricos que le permitan apropiarse de métodos y procedimientos de trabajo de las ciencias y que promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.
- Utilizar técnicas para un aprendizaje individual y colectivo eficiente y para la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación.
- Exponer sus argumentaciones de forma coherente y convincente a partir del dominio de la simbología y terminología matemáticas, como premisa para su mejor desenvolvimiento en todos los ámbitos de su actividad futura.

## PLAN TEMÁTICO

| Unidad | Título | Horas clases |
|---|---|---|
| 1 | El dominio de los números reales | 23 |
| 2 | Trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones | 48 |
| 3 | Funciones modulares, potenciales y sus inversas | 30 |
| 4 | Trigonometría y sus aplicaciones a la geometría | 55 |
| 5 | Estadística Descriptiva | 15 |
| | Sistematización y Reserva | 14 |
| | Total | 185 |

**Orientaciones Metodológicas para el tratamiento de las UNIDADES**

En las orientaciones que se ofrecen para cada unidad y unidad temática aparecen siempre esquemas que reflejan la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en ellas, resaltando en el recuadro los puntos esenciales y sobre la línea discontinua, los conocimientos previos.

UNIDAD 1. DOminios numéricos. (25 h/c)

**INTRODUCCIÓN**

Esta unidad da continuidad al estudio de los dominios numéricos, lo cual se ha iniciado desde los primeros grados de la enseñanza primaria y continuado en el nivel de secundaria básica; además, sienta las bases para una nueva ampliación de los dominios numéricos en el grado doce: *el dominio de los números complejos.*

Es por ello que para su estudio se hacen precisiones sobre los principales conceptos que en ella se introducen, así como sus definiciones correspondientes, porque muchos de estos conceptos son conocidos, pero no definidos explícitamente; tal es el caso del concepto ***intersección de conjuntos***, por solo citar un ejemplo: $A \cap B=\{x: x\in A \text{ y } x\in B\}$, lo cual deberán entender por su *representación simbólica y por su descripción:* la intersección de dos conjuntos es un conjunto determinado por los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos. De igual forma se debe proceder con *las restantes operaciones* e incluso al estudiarse relaciones como la de inclusión, donde queda precisado que $A \subset B$ significa que si $x \in A$, entonces $x \in B$.

Con la sistematización de los dominios numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}$), y la profundización en el estudio de los números reales, se realizarán *precisiones en cuanto al trabajo con intervalos* por constituir estos la base fundamental para la resolución de inecuaciones y la determinación del dominio de funciones que serán objeto de estudio en el propio grado y en grados posteriores.

*Las operaciones de cálculo*, juegan un importante papel en la unidad y se presentarán *a partir de la* resolución de problemas de la vida, de carácter político - ideológico, económico – social y científico – ambiental, donde integren las operaciones con números naturales, fraccionarios, racionales y reales en los que sea necesaria la conversión de una representación a otra de estos números y donde se combinen las diferentes operaciones, el tanto por ciento, el tanto por mil y el trabajo con cantidades de magnitud.

En esta sistematización de las operaciones de cálculo con números reales se precisará que las operaciones aditivas y multiplicativas tienen operaciones inversas. En particular, la adición y multiplicación con números reales al ser conmutativas garantizan la existencia de una única operación inversa, siendo ellas la sustracción y la división. No obstante la operación de potenciación, por su carácter no conmutativo, se tiene que si $a^b = c$, entonces $b^a \neq c$ con $a, b \in R$, $a \geq 0$ y $b \geq 0, a \neq b$, excepto en el caso muy particular de a = 2 y b = 4, lo que conduce a la existencia de dos operaciones inversas, la radicación y la logaritmación.

Lo esencial es lograr una profundización sobre el dominio de los números reales a partir de la comprensión de conceptos, relaciones y propiedades elementales de la teoría de conjuntos, el desarrollo de habilidades de cálculo con números reales y sus aplicaciones a la resolución y formulación de problemas.

En esta unidad se desarrollará una contribución al desarrollo de la convicción acerca de la potencialidad de los métodos y procedimientos matemáticos para comprender fenómenos y procesos de la realidad, de la convicción sobre la desigualdad e inequidad que genera el capitalismo y su incapacidad para garantizar un desarrollo sustentable y sostenible, de la convicción acerca de la necesidad de ser protagónico en su proceso formativo y solidario con sus compañeros de grupo, a la vez que crítico consigo mismo y para con los demás. De igual se favorecerá desarrollo de una orientación positiva hacia el aprendizaje, promoción de rasgos del carácter como ser reflexivo, flexible, tenaz, laborioso, responsable, preocupado por la calidad del producto de su actividad, moderado y respetuoso en su relación con los otros, cooperativo, valorativo de su actuación y la de sus compañeros y otras

**Objetivos de la unidad**

Los estudiantes deben ser capaces de:

- Identificar las propiedades fundamentales de las operaciones con números reales, las relaciones de los dominios numéricos y fundamentar sus limitaciones sobre la base de la teoría de conjuntos, haciendo una adecuada utilización de la terminología y simbología matemáticas y de la lengua materna.
- Aplicar las operaciones de cálculo aritmético y los cálculos estimados en distintas situaciones sobre la base de una comprensión más profunda de los significados de los números y de las operaciones racionales e irracionales, de las leyes para el cálculo de potencias, raíces y logaritmos, así como de los procedimientos que se emplean para realizarlas, aplicando el Sistema Internacional de unidades y sus conversiones hacia otras unidades de uso común.
- Resolver ejercicios formales que requieran la aplicación de las operaciones irracionales, radicación y logaritmación, así como la demostración de algunas propiedades a partir de la generalización del concepto de potencia y donde se apliquen sus propiedades.
- Formular y resolver problemas intra y extramatemáticos que requieran extraer incluso información de tablas y gráficos, relacionados con hechos, fenómenos y procesos de la vida práctica de carácter político ideológico, económico- social y científico - ambiental, que se modelen con los recursos de la aritmética, aplicando de forma integradora los conocimientos y habilidades sobre propiedades de los dominios numéricos, las operaciones racionales e irracionales, el tanto por ciento y el trabajo con magnitudes, y otras áreas matemáticas como la geometría y la estadística descriptiva.

## ESTRUCTURA INTERNA DE LA UNIDAD 1

Conjuntos

- Relaciones entre conjuntos
- Operaciones con conjuntos

Dominio de los números

- Limitaciones, propiedades y relaciones entre dominios numéricos
- **Intervalos numéricos**

**Operaciones racionales con números reales**

- Suma algebraica, multiplicación y división. Propiedades
- Calculo del tanto por ciento y del tanto por mil
- Potenciación
- Potencia de exponente entero. Propiedades

**Operaciones irracionales con números reales**

**Radicación** **Logaritmación**

- **Propiedades**
- **Simplificación**
- **Operaciones con radicales**

- **Identidad fundamental**
- **Cálculo con logaritmos sencillos**

Esquema

De esta estructura se derivan las siguientes unidades temáticas.

- Conjuntos
- Dominios numéricos
- Operaciones racionales con números reales
- Operaciones irracionales con números reales

| Sub. unidad | Contenidos | 23h/c |
|---|---|---|
| 1.1 | Conjuntos. Relaciones, operaciones y propiedades. Problemas. | 3 |
| 1.2 | Dominios numéricos. Repaso y profundización sobre los dominios numéricos. Orden y operaciones. Relaciones y propiedades de las operaciones. Limitaciones y relaciones entre dominios numéricos. Intervalos numéricos. Problemas. | 3 |
| 1.3 | Operaciones racionales con números reales en diferentes representaciones aplicados a problemas en que se requiera calcular con cantidades de magnitud, con tantos por ciento y tantos por mil. Problemas. | 3 |
| 1.4 | Operaciones irracionales con números reales. Potencia de exponente racional. Radicación y logaritmación. Aplicaciones.<br><br>Radicación. Su interpretación como operación inversa de la potenciación. Potencia de exponente racional. Propiedades. Simplificación de radicales. Reducción de radicales a un mismo índice. Radicales semejantes Operaciones con radicales. Racionalización de denominadores para el caso de monomios y binomios numéricos.<br><br>Logaritmación. Su interpretación como operación inversa de la potenciación. Definición de logaritmo de base a ($a > 0$ $a \neq 1$). Identidad fundamental logarítmica. Cálculo de logaritmos aplicando la definición. Aplicaciones. Resolución y formulación de problemas donde integren las operaciones con números reales en diferentes notaciones y donde se evidencie la utilidad del cálculo con radicales y logaritmos. | 11 |
| Sistematización de la Unidad | | 3 |

Bibliografía básica para el desarrollo de la unidad

Libro de texto de Matemática de Décimo grado.

Manual de Ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior(MEM),Capítulo 1

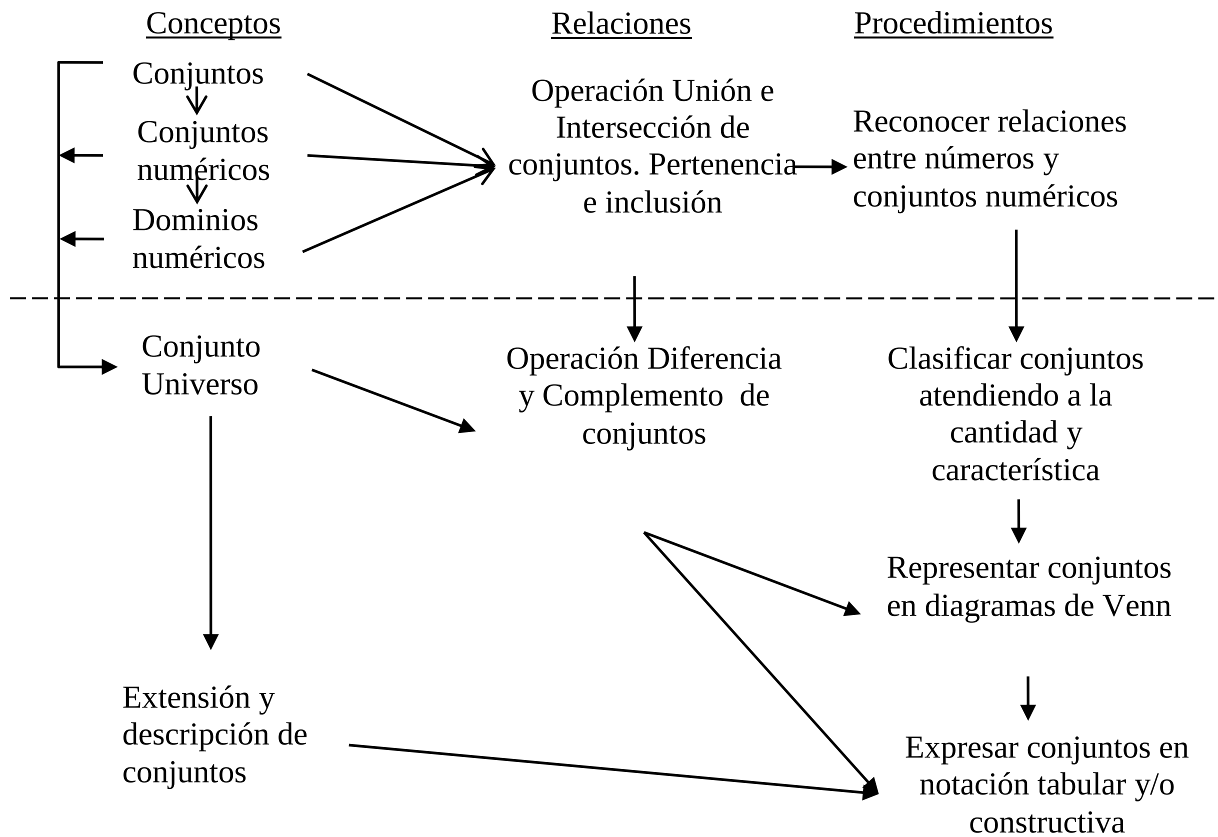
Para el tratamiento de la unidad es esencial que los estudiantes logren:

- Expresar las relaciones entre conjuntos y las operaciones con conjuntos utilizando la terminología y simbología conjuntistas y en particular aplicarlas a las operaciones con intervalos numéricos.
- Comprender las limitaciones de los dominios numéricos, ordenar y calcular con números reales expresados en diferentes notaciones, previa estimación de los cálculos.
- Interpretar el significado del tanto por ciento y el tanto por mil.
- Reconocer cuando existe la raíz n-ésima de un número real a partir de comprender el concepto de raíz n-ésima, la definición de potencia de exponente racional con base no negativa y las propiedades de estas potencias y desarrollar habilidades en el cálculo con ellas.
- Comprender que es posible definir las potencias de base real con base positiva y reconocer la radicación y la logaritmación como operaciones inversas de la potenciación.
- Reconocer las propiedades de los radicales como un caso particular de las propiedades de la potenciación y desarrollar habilidades en la simplificación y el cálculo con radicales.
- Resolver ejercicios de cálculo en los que sea necesario aplicar los procedimientos para racionalizar denominadores monomios y binomios.
- Comprender la relación expresada en la identidad fundamental logarítmica y calcular logaritmos sencillos.
- Identificar en diversas aplicaciones intra y extramatemática el uso de las operaciones de radicación y logaritmación.
- Aplicar las reglas de divisibilidad en ejercicios y problemas con texto.
- Argumentar relaciones y propiedades de forma verbal, simbólica y numérica.

## 1.1 Conjuntos

Para el tratamiento de este punto esencial se sugieren 3 h/c y el contenido correspondiente aparece en el epígrafe 1 y 2 del Capítulo 1 del LT 10mo grado y en el epígrafe 1.2 del Capítulo 1 del Manual de Ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior (MEM).

### Estructura interna de la subunidad 1.1




Esquema

Al concluir la unidad temática los estudiantes deben ser capaces de:

- Reconocer y expresar las relaciones de pertenencia e inclusión entre elementos y conjuntos, utilizando la terminología y simbología conjuntista
- Clasificar conjuntos atendiendo a la cantidad y características de los elementos que lo integran.
- Determinar o definir un conjunto por extensión o descripción y denotarlos utilizando la notación tabular o la notación constructiva
- Resolver las operaciones con conjuntos. Representar las relaciones conjuntistas estudiadas, utilizando diagramas de Venn.

Para activar los conocimientos sobre los conceptos básicos de la teoría conjuntista, no se empleará mucho tiempo, se sugiere partir de la interrogante: ¿Qué es un conjunto? Las respuestas esperadas, serán las que indiquen la noción de pluralidad de objetos que nos sugiere la palabra conjunto. Por lo general algunos estudiantes darán como respuestas ejemplos de conjuntos; que se aprovecharán para significar la aplicación del concepto en diferentes áreas intra y extramatemáticas. Con este fin el profesor puede con intención promover la producción de ideas de los alumnos, e incluso complementar la propuesta con ejemplos similares a los siguientes:

| |
|---|
| A: Conjunto de grupos del décimo grado de una escuela. |
| B: Conjunto de países que integran el ALBA. |
| C: Conjunto de órganos que conforman el sistema digestivo. |

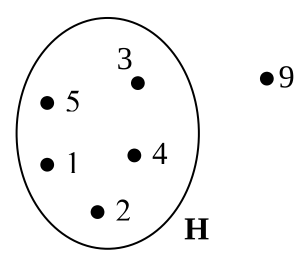
| | |
|---|---|
| | D: Conjunto de todos los elementos químicos que conforman la tabla periódica de 18 columnas, de Mendeleiev.<br>E: Conjunto de todos los triángulos equiláteros del plano<br>F: Conjunto de puntos de la recta real<br>G: Conjunto de los números racionales que son solución de la ecuación $3x - 7 = 28$<br>H: Conjunto de los números naturales cuyo cubo sea menor que 200. |

A partir de los ejemplos seleccionados se desarrollará todo el contenido de la unidad temática, con lo que se garantizará que los estudiantes adquieran una noción clara del significado que en matemática tiene el uso del término, al destacar que los ejemplos cumplen las <u>reglas</u> siguientes:

- Primero: Los objetos que integran un conjunto deben estar bien <u>individualizados</u> y se denominan <u>elementos</u> del conjunto.
- Segundo: El conjunto debe estar <u>perfectamente determinado</u>.

Por ejemplo en el conjunto D, se tiene que los elementos de la tabla periódica están bien delimitados por su masa atómica por lo que no se confunde el oxígeno con el hidrógeno o cualquier otro elemento, de igual forma se puede analizar que las reglas se cumplen para el conjunto C pues solo la relación entre los órganos que integran el sistema digestivo permite el cumplimiento de sus funciones, lo cual de faltar uno no sería posible.

No se debe dejar de tratar un ejemplo como el conjunto H, donde se tiene que $3 \in H$; porque $3^3 = 27 <$ 200 y $9 \notin H$ porque $9^3 = 729 >$ 200. Observe que el trabajo se realizará utilizando la simbología correspondiente para expresar las relaciones estudiadas, asumiendo que son contenidos ya aprendidos por los estudiantes Se realizará la lectura utilizando la terminología correcta, es decir, el símbolo $\in$ se lee, "pertenece" y su negación $\notin$, se lee "no pertenece".




Para garantizar la comprensión total del concepto se recomienda solicitar a los estudiantes que representen algunos de los conjuntos finitos seleccionados utilizando <u>diagramas de Venn</u>. La actividad permitirá puntualizar que en estos diagramas los elementos que pertenecen al conjunto se representan en la región interior de la curva cerrada. En cambio si el elemento dado no pertenece al conjunto, este se representa por un punto de la región exterior.

Como resultado de la actividad se repasará la clasificación de conjuntos, pues se encontrarán conjuntos como el E y el F en los que no se pueden nombrar o numerar la totalidad de sus elementos, o como el G, donde se presenta una ecuación lineal cuyo conjunto solución tiene un solo elemento. Aprovechando este caso se pueden variar las condiciones del conjunto G, planteando, <u>*que pasaría si*</u> G se define como conjunto de los números enteros que son solución de la ecuación $3x - 7 = 28$, con lo que se recordará la existencia de conjuntos que no tienen ningún elemento.

Llegado a este punto estamos en condiciones de generalizar el concepto de conjunto analizando problemas que nos permiten comprender la existencia de conjuntos unitarios y conjuntos vacíos y con infinitos elementos, aspectos con los cuales se completa la pluralidad que nos sugiere la palabra conjunto.

Se puede estimular a los estudiantes a <u>tomar notas</u> sobre la clasificación de conjuntos de la forma más resumida posible, por ejemplo:

Clasificación de conjuntos

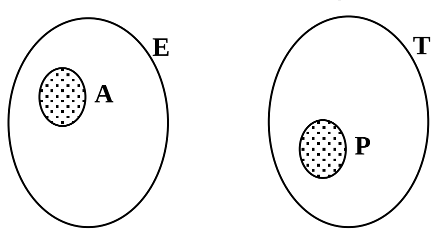
- conjunto infinito → Cuando **no** se pueden numerar o nombrar todos sus elementos
- conjunto finito → Cuando se pueden numerar o nombrar sus elementos
- conjunto unitario → Cuando tiene un solo elemento
- conjunto vacío → No tiene elementos

Cuando se realiza este tipo de actividad con sistematicidad se contribuye al desarrollo de la habilidad de tomar notas y resumir utilizando tablas, mapas conceptuales, gráficos, etc.

Es este un momento oportuno para analizar el carácter relativo de los conceptos conjunto y elemento, para lo cual se sugiere identificar en los ejemplos tratados u otros nuevos aportados por los estudiantes, aquellos conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos y elementos de otro conjunto más amplio.

La reflexión con los estudiantes se puede orientar hacia el análisis de la relación que se puede establecer entre los elementos del conjunto A en el contexto de una escuela y del conjunto P con respecto a todos los triángulos del plano. El resultado del análisis puede dar paso al estudio de la relación de inclusión e igualdad de conjuntos, pues como resultado del intercambio se obtendrán proposiciones como las que se representarán en los diagramas de Venn siguientes:

| | |
|---|---|
| A es un subconjunto del conjunto de todos los grupos de la escuela E. Se denota: $A \subset E$. | P es un subconjunto del conjunto de todos los triángulos del plano T. Se denota: $P \subset T$. |




Se puede orientar a los estudiantes, que seleccionen uno de los casos para que expresen y escriban el significado de las relaciones obtenidas, por ejemplo, en el segundo caso se pueden hacer los siguientes planteamientos:

- Todo elemento de P pertenece también a T.
- P es una parte de T.

- P está incluido en T.

Seguidamente se propone reflexionar sobre la interrogante siguiente:
¿Puede afirmarse lo mismo de T con respecto a P? el análisis permitirá utilizar la negación del símbolo de inclusión al plantear que T $\not\subset$ P.
Para ejercitar y evaluar la comprensión de los contenidos tratados hasta el momento, además de resolver los ejercicios del LT y de la Bibliografía orientada, es recomendable solicitar a los estudiantes que realicen algunas propuestas de ejercicios que cumplan las condiciones siguientes.

1. Completar o fundamentar la veracidad o falsedad de proposiciones en los que se utilicen los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$.

2. Clasificar conjuntos finitos, infinitos, unitarios y vacíos. ,

3. En todos los casos se deben plantear ejemplos de aplicación en diferentes áreas intra y extramatemática y en particular aplicados a la estadística descriptiva.

Como parte de la profundización del contenido a tratar en este epígrafe se formalizará el estudio de las formas de determinar y denotar conjuntos, para lo cual se recomienda continuar trabajando con los ejemplos, donde se hará notar las dos formas para determinar los conjuntos: por extensión y por descripción.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Por extensión | Se enuncian los elementos que lo integran | Ejemplo: | Conjunto de todos los órganos que conforman al sistema digestivo. |
| Por descripción | Se establecen las propiedades o características de todos sus elementos o por fórmulas | Ejemplo: | Conjunto de todos los números naturales cuyo cubo es menor que 200. |

¿Cómo se escriben los conjuntos que se definen por extensión?
Se les pedirá a los estudiantes que escriban en forma de conjunto los elementos del conjunto C.

C = { boca, faringe, esófago, estómago, intestino delgado, intestino grueso, ano }

Esta forma de escribir se denomina notación tabular.
A partir de ejemplos se pueden hacer las siguientes observaciones.

- En la notación tabular de un conjunto no se escribe más de una vez los elementos que se repiten.

Ejemplo: Para analizar el rendimiento académico de un estudiante un profesor toma como dato el valor de las notas alcanzadas en las 15 evaluaciones sistemáticas de la etapa:10; 9; 6; 6; 4; 7; 7; 8; 9; 10; 10; 8; 6; 7; 5. El conjunto de notas expresado en notación tabular sería: N = {10; 9;6;4;7; 8; 5 }.

En la notación tabular de un conjunto no es preciso escribir los elementos en un orden determinado M = $\{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ N y M son idénticos.

Se indagará con los estudiantes acerca de otras formas conocidas por ellos para denotar conjuntos, de manera particular los que se determinan por extensión.

Se sugiere analizar el ejemplo H: Conjunto de todos los números enteros cuyo cubo es menor que 200. Observarán que se han dado las propiedades características de los elementos de H, es decir está perfectamente determinado.

Luego se escribe: $H = \{x \in N : x^3 < 200\}$. Se lee: son todos los elementos x que pertenecen a los números naturales tales que x al cubo es menor que 200.

Para fijar el procedimiento es conveniente proponer ejercicios como los siguientes:

1. Escribe en notación constructiva los siguientes conjuntos:
   a) El conjunto de los números enteros comprendidos entre -205 y 178.
   b) El conjunto de los números naturales impares mayores que 121.
   c) El conjunto de los números enteros comprendidos entre -5 y 43, ambos inclusive..
   d) El conjunto de todos los puntos de un plano que son vértices de un triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa un segmento fijo en dicho plano.
2. Sea el conjunto M = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16}.
   a) Indica en qué notación está expresado el conjunto M.
   b) Escribe dicho conjunto en notación constructiva.

A partir del análisis del ejercicio se pueden hacer las siguientes observaciones:

- ✓ Si un conjunto finito se ha determinado por descripción, este se puede denotar en notación tabular. Si un conjunto es finito, pero tiene muchos elementos, no es preciso escribirlos todos. Si está definido por descripción, se puede escribir en notación tabular detallando solo algunos elementos de manera que se evidencien las condiciones que tienen que cumplir los elementos para pertenecer a dicho conjunto.

Ejemplo: Sea R el conjunto de los números enteros cuyo cuadrado es menor o igual que 2 500 y mayor que 25. Puede denotarse así:

$R = \{6; -6; 7; -7; 8; -8; \ldots; 49; -49; 50; -50\}$ *notación tabular*

$R = \{x \in Z: 25 < x^2 \leq 2500\}$ *notación constructiva*

Ambas notaciones permiten conocer cuándo un elemento pertenece a uno de estos conjuntos puesto que se evidencian las propiedades de los elementos del conjunto en cuestión.

En una conversación con los estudiantes se llegará la conclusión de que existen conjuntos infinitos que se pueden escribir en notación tabular y se les exhortará a que presenten ejemplos de estos.

Como una ampliación de la clasificación de conjuntos se introducirá el concepto de conjunto universo. Se puede hacer, utilizando cualquier ejemplo dado en notación descriptiva, haciendo notar que en esos casos se han dado todas las características de los elementos que lo integran. Observarán que entre las propiedades que definen a un conjunto, se encuentra siempre una propiedad que nos obliga a buscar sus elementos en otro conjunto “más amplio” que contiene al conjunto que se trata de determinar por ejemplo $H = \{x \in N: x^3 < 2\}$ significa que $H \subset$ IN. Es decir, que en este caso se ha tomado a IN como conjunto de referencia pues la propiedad característica atribuida al conjunto H ha determinado un subconjunto de IN, que está determinado por los números naturales que poseen la propiedad en cuestión. El conjunto de referencia se llama <u>conjunto universo.</u>

Es conveniente hacer notar que si variamos las características de un conjunto, no siempre se obtiene el mismo conjunto. Por ejemplo: en el conjunto R tomemos IN como universo, verifiquemos si define ahora la propiedad $25 < x^2 \leq 2500$ el mismo conjunto que antes se determinaba en□□, en este caso se tiene el conjunto $\{6; 7; 8; \ldots; 49; 50\}$ *compuesto solo por números naturales.*

Se concluirá que en la práctica se presentan ciertos problemas en los cuales es necesario definir el conjunto en el cual buscaremos la solución. Es decir prefijamos el conjunto universo, pues en cada momento nos estaremos refiriendo a sus elementos, en la discusión o solución del problema que nos ocupa.

Otro momento de profundización se presenta en el tratamiento de las operaciones con conjuntos este contenido aparece en el epígrafe 2 del LT de 10mo grado y en el epígrafe 1.2 pág 4-7del Capítulo 1 del MEM.

Se recomienda que mediante ejemplos se reactiven las operaciones de intersección, unión, diferencia y complemento de un conjunto como aparece el MEM y orientar tomar como nota el cuadro resumen de la pág 4. De utilizar las definiciones 1,2, del epígrafe 2 del LT de10mo grado, se debe completar con la definición de conjunto complemento.

Definición 3

| |
|---|
| Dado un conjunto A, subconjunto del conjunto universo U, se define como conjunto complemento de A, (se denota $A^c$ ) al otro subconjunto de U de los elementos que no están contenidos en A . |

Se concluirá mediante ejemplos que cualquier conjunto y su complemento son disjuntos.

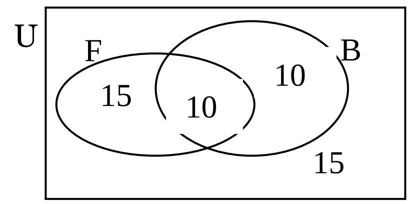
Se destacará mediante ejercicios, que la operación diferencia no es conmutativa y que la intersección sí lo es.

De la misma forma se destacará la utilidad de los diagramas de Venn para representar las operaciones entre conjuntos.

Un problema interesante para lograr la comprensión y fijación de los contenidos tratados en esta parte es el que se obtiene variando las condiciones del ejercicio 5 del pág.15 del MEM, al cual se le puede agregar los siguientes incisos:

a) Representa en un diagrama de Venn las relaciones que se dan en los datos.

b) Identifica el conjunto universo U, un subconjunto de U y su complemento.



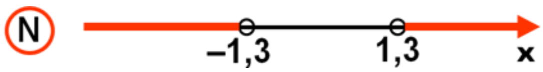

Respuesta:

El conjunto universo lo conforman los 50 estudiantes del curso (que se denota: # U = 50 y se lee: cardinal de U). El conjunto D ($F \cup B$): formado por todos los que practican deportes es un subconjunto de U, su complemento es el subconjunto de U formado por los 15 estudiantes que no practican ningún deporte.

Par la fijación de los contenidos de este temática se puede resolver los siguientes ejercicios:

1. Ejercicios 2, 3, 4 y 5; epígrafe 1, Capítulo 1 del LT 10mo grado.
2. Ejercicio 1, 2, 3 epígrafe 2, Capítulo 1 del LT 10mo grado.

3. Escribe en notación constructiva los siguientes subconjuntos de números reales:

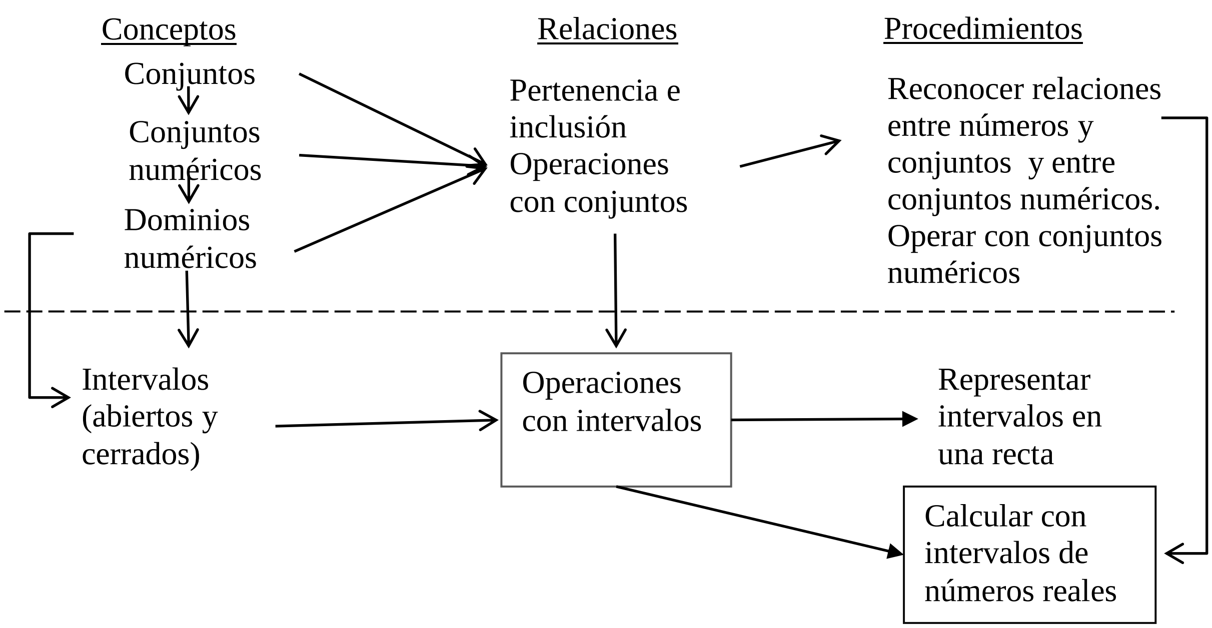

4. Ejercicios 4, 11,12, 15, epígrafe 1.2, del MEM.

5. Sea el universo el conjunto U siguiente $U=\left\{\sqrt{5};\ -4{,}2;\ -6;\ 15;\frac{4}{9},17\right\}$. Escribe no menos de 4 proposiciones V o F, en las que intervengan los símbolos $\in, \notin, \subset$ y $\not\subset$. Verifica en el grupo la validez de tus propuestas.
6. Ejercicios del 1 al 10, 14, 15,17 epígrafe 1.2 del capítulo 1 del MEM.
7. Ejercicio1 epígrafe 2 del capítulo 1 LT 10mo grado.

**1.2. Dominios numéricos**

Para el tratamiento de este punto esencial se sugieren 3 h/c y el contenido correspondiente aparece en el epígrafe 1.2 del Capítulo 1 del Manual de Ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior (MEM).

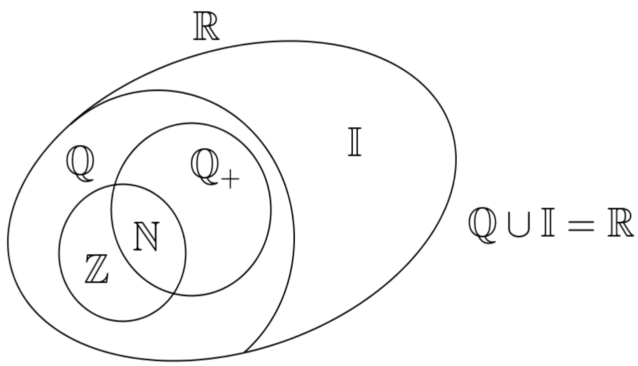
**Estructura interna de la subunidad 1.2**




Esquema

Lo fundamental que debe lograr el profesor en estas clases es que sus alumnos puedan reconocer cuándo un número dado pertenece o no a un conjunto numérico determinado, así como si un conjunto numérico es subconjunto o no de otro, además, algunas formas nuevas de representación conjuntista como son los intervalos de números reales y a calcular con estos, y o aplicarlos la estadística descriptiva en el trabajo con datos agrupados para la construcción e interpretación de tablas de frecuencias y gráficos.

Para profundizar sobre los distintos dominios numéricos, no se debe emplear mucho tiempo, basta recordar los dos grandes subconjunto de números que forman los números reales (racionales e irracionales), mediante un cuadro sinóptico como el que aparece en el libro de texto, o diagramas de Venn como aparece en la figura____ .Sistematizar las características fundamentales que diferencian sus elementos y que se expresan en el libro texto en el Teorema 1 y en el recuadro posterior al Ejemplo 1.




Recordando lo anterior, deben entonces precisarse algunos subconjuntos importantes de los racionales, en particular el de los enteros no negativos (naturales) y el de los negativos, así como el subconjunto de los racionales que no son propiamente enteros y que el cuadro sinóptico del libro de texto se ha denominado “fracciones positivas y negativas”

Este es un momento apropiado para esclarecer la diferencia entre dominio numérico y conjunto numérico, dejando explicito el hecho de *los números irracionales no constituyen un dominio numérico por cuanto las operaciones de adición y multiplicación no son operaciones internas en el conjunto de los números irracionales, es decir el producto o suma de números irracionales no siempre es un número irracional, por ejemplo:*

1) $\sqrt{2} \in I$ pero $\sqrt{2}.\sqrt{2} \notin I$ ya que $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2 \in N$ o

2) $a = 0{,}101001000..... \in I$ , $b = 0{,}010110111\ldots \in I$ pero $a + b = 0{,}11111... \in Q_+$ por ser $a + b$ una fracción decimal periódica de período $1$.

Se debe continuar la sistematización de las relaciones de pertenencia y de inclusión, sus símbolos respectivos, así como de sus negaciones, con ejercicios como los del Ejemplo 1 del libro de texto y del 1 al 3 de los ejercicios del epígrafe, así como los Ejemplos de 1 al 5 del MEM (página 10 a la 12).

Se deben presentar ejercicios y problemas que permiten hacer una sistematización integradora de los contenidos tratados, lo cual se logra cuando las exigencias de las tareas permiten que se obtengan diversas respuestas, hacer inferencias a partir de la variación de condiciones en el enunciado y el proceder didáctico con las mismas debe favorecer la socialización, dirigida a encontrar además la las respuestas correctas, las más optimas y racionales. Las siguientes tareas son representativa de las ideas anteriores.

1.Sea $M = 2x + 3y - \frac{4}{5}z$. Sustituye x, y, z de modo que M sea un número:

a) natural.

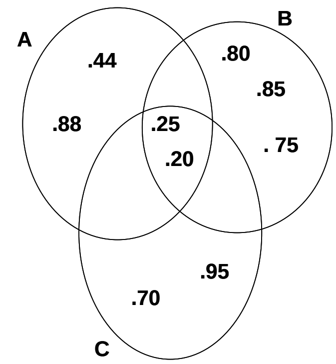
b) entero negativo

c) racional

d) irracional

e)

**2.** En el diagrama de Venn se representan las notas de Matemática de una muestra de estudiantes seleccionada de tres grupos de una escuela. La selección de la muestra cumple la siguiente condición. *Los seleccionados de un mismo grupo tienen notas diferentes*




2.1 Completa el espacio en blanco de manera que obtengas una proposición verdadera.

a) La operación que permite obtener el conjunto de notas *alcanzadas por los estudiantes de la muestra es_________.*

2.2 Marque con una x la respuesta correcta

a) La operación que permite obtener el conjunto de notas que están por debajo de 30 puntos es:

$A \cap C$__ BUA __ $A \cap B \cap C$ __ Ninguna de las anteriores____ ¿cuál?

b) La operación que permite obtener el conjunto de notas del grupo C, que no se repiten en otros grupos es:

C\ A __ C \ B __ C\ A ∩ B__ Ninguna de las anteriores ___ ¿cuál?

2.3. Escribe al menos dos proposiciones verdaderas, a partir de la información estadística que ofrecen los datos de la muestra, en el diagrama de Venn.

3. Completa el espacio en blando de forma que obtengas una proposición verdadera.

Sea A= $\left\{\frac{a}{b}; a,b \in N \ y b \neq 0\right\}$ y B el conjunto de los números enteros.

a) Se puede considerar un subconjunto de A al conjunto de los números __________.

b) Dos números que pertenecen al conjunto A y al B a la vez son _______________.

c) Si el conjunto C = A∩B entonces C = _______.

d) Si el conjunto C = AUB entonces C = _______.

e) Si el conjunto C = A\ B entonces C = _______.

Una propuesta de cómo variar las condiciones en este ejercicio puede ser, pedirle a los estudiantes que analicen: *que pasaría si B es el conjunto de los números naturales cuyo cubo es menor que 200.*

Este tipo de tareas limita la tendencia a la ejecución que ha prevalecido en los modos de actuación de los estudiantes, puesto que exigen dominio de la base conceptual y las relaciones que tienen que utilizar como recursos, para resolver la situación planteada.

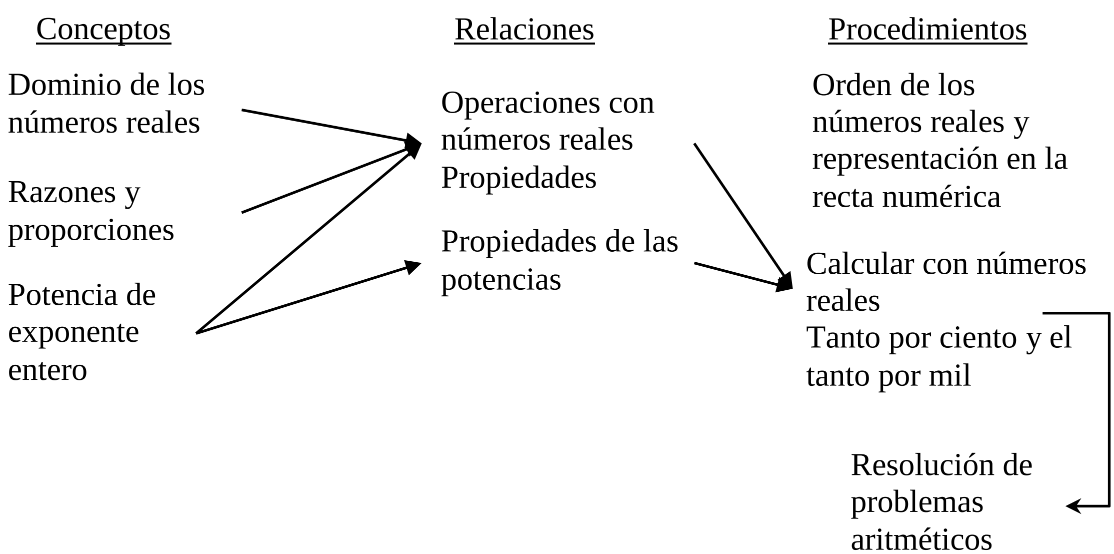
Como una profundización y también mediante ejemplos deben introducirse los intervalos de números reales su notación y representación gráfica, los que constituyen conocimientos previos para representar determinados conjuntos, tales como el conjunto solución de inecuaciones y el dominio e imagen de una función que serán tratados en la unidades 2 y 3.

Para el trabajo con este contenido se debe iniciar con los Ejemplos del 1 al 4 del MEM pág 13 -14 y continuar con los Ejemplos 2, 3 y 4 del libro de texto. En ellos se precisan algunos aspectos importantes como es el uso de las desigualdades estrictas o no en la escritura conjuntista de intervalos y lo que esto significa para la gráfica. En especial el Ejemplo 4b) incluye conjuntos que son un tipo especial de intervalos y el profesor debe destacar ese hecho. También se pueden utilizar el material disponible en la vidoclases 26 a la 29 de la Unidad 1

**1.3 Operaciones racionales con números reales (3h/c)**

Para el tratamiento de este punto esencial se sugieren 7 h/c y el contenido correspondiente aparece en el epígrafe 1.3 del Capítulo 1 del Manual de Ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior (MEM).

En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática




Esquema ______

La vía metodológica fundamental de esta unidad temática es la profundización y sistematización, se continuará el trabajo con las operaciones fundamentales con números reales en diferentes notaciones y sus propiedades.

Para lograr lo anterior se pueden utilizar los ejemplos y ejercicios del epígrafe 1.3.1 del M.E.S. u otros creados por el profesor.

El tratamiento de la potenciación se limitará al cálculo con potencias de exponente entero de manera que se fijen las propiedades y constituya un aseguramiento para el trabajo con radicales.

Con relación a ejercicios de cálculo con potencias se puede comenzar con ejercicios de cálculo simples ya sea calculando las potencias o aplicando las propiedades de las mismas hasta llegar a ejercicios donde la aplicación de las propiedades nos dé una forma ventajosa para el cálculo, por ejemplo: $N = \frac{5^{36} \cdot 8^{5}}{5^{25} \cdot 2^{16}}$

Se recomienda realizar los ejercicios siguientes y otros de mayor nivel de dificultad:

1. Ejercicios 15, 16 , 17, epígrafe 1.3, del MEM.
2. La masa de la Luna es de 73 500 000 000 000 000 000 000 000 g y se supone que es el 1,2% de la masa terrestre.

a) Calcula la masa de la Tierra.

b) Si cada gramo equivale a 2,2 ·10–3 lb, ¿cuál es la masa de la Tierra en libras?

3. Ejercicio 34, 40, 52, 54, epígrafe 1.3, del MEM.

La resolución de ejercicios y problemas de proporcionalidad aplicando el tanto por ciento, el tanto por mil y que incluya el trabajo con magnitudes y la aplicación a la estadística descriptiva, se puede utilizar la modelación con los recursos de la aritmética, lo cual no limita la resolución a través de ecuaciones lineales.

Ejemplos:

*1. Una cooperativa tiene que fertilizar todas sus tierras. El lunes fertilizó las $\frac{5}{7}$ partes del total de estas y el martes sólo fertilizó el 75% del resto, pues se acabaron los 390 qq de fertilizantes que tenían, quedándole 1,5 ha por fertilizar.*

*a) ¿Cuántas ha de tierras tiene la cooperativa?*

b) Si se utilizó la misma cantidad de fertilizantes por ha, ¿cuántos qq del mismo serán necesarios para fertilizar las tierras que faltan?

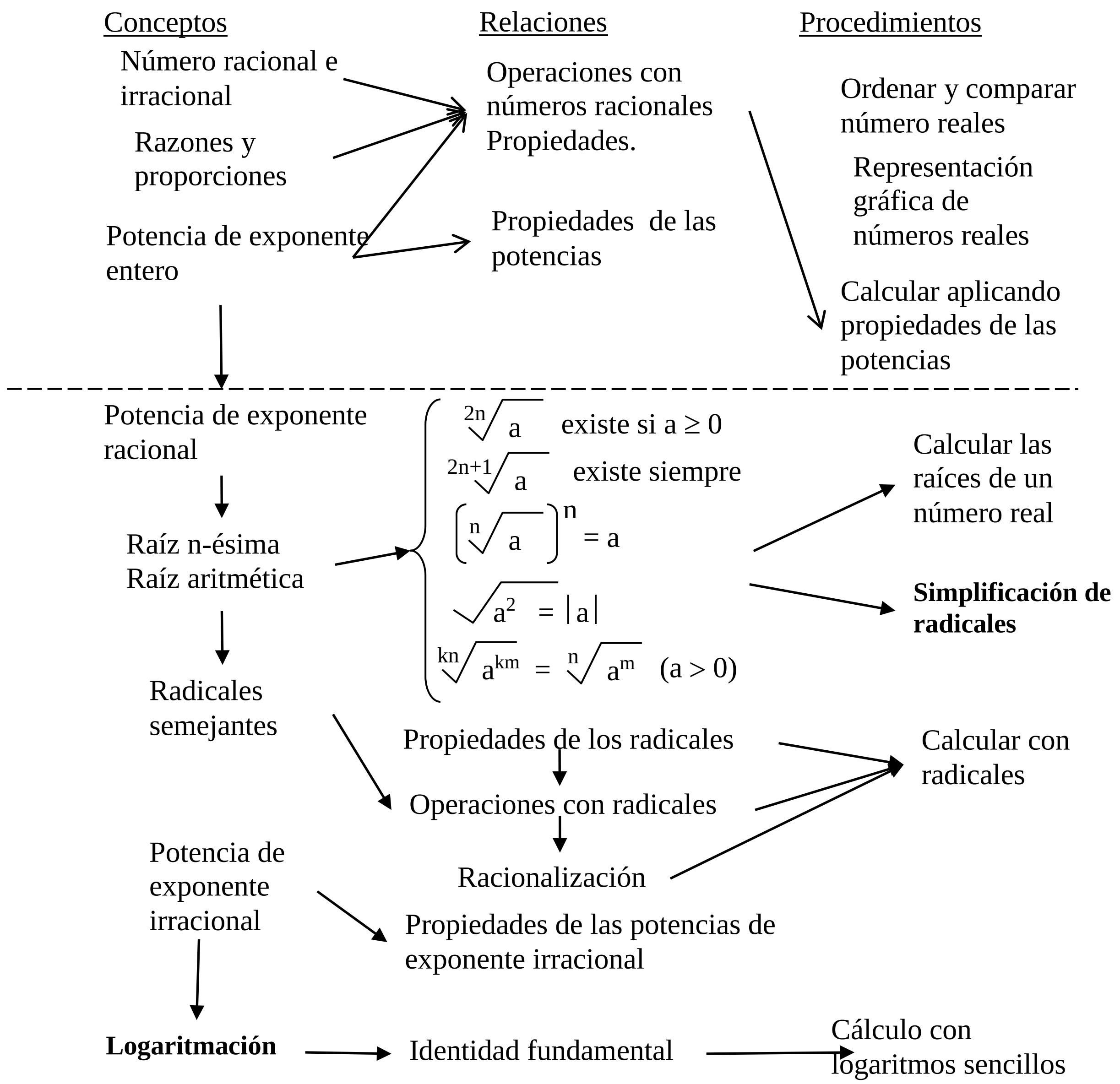
2. En 9 días la caldera de una fábrica consumió las tres quintas partes del petróleo que tenía en el tanque, y en los 6 días siguientes gastó el 75% del resto del combustible, quedando aún 720L en el tanque.¿ Cuántos litros consumió en los primeros 9 días?

b) ¿Cuántos litros de petróleo habrá que echarle para que la caldera pueda trabajar 10 días más, consumiendo un promedio diario igual al de los 15 días anteriores?

Para el trabajo con el tanto por ciento y el tanto por mil se deben remitir a las viodeoclases 5.6.7.8 de la Unidad1.

### 1.4 Operaciones irracionales con números reales (11 h/c)

En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática




Esquema

En el esquema anterior se distingue dos puntos esenciales: simplificación de radicales y calcular con radicales.

**Orientaciones metodológicas para el tratamiento *del repaso profundización y la simplificación de radicales ( 5 h / c)***

El contenido de este punto esencial aparece en el Epígrafe1 al 7 del Capítulo 2 del libro de texto y en el Epígrafe 1.4.1 del M.E.M.

Lo fundamental que debe lograr el profesor en estas clases es que sus alumnos inicien el desarrollo de habilidades en la simplificación de radicales.

Como motivación para la unidad temática puede conversar con sus alumnos acerca de que en esta unidad ampliarán sus conocimientos sobre las potencias y que en particular podrán llegar a definir potencias con exponentes más generales que los enteros, como son las potencias de exponente racional.

En estas clases aunque no es esencial se dedicarán al final dos de ellas a completar el concepto de potencia, en esta caso de exponente irracional, y a la presentación de la logaritmación como otra operación inversa de la potenciación.

Para lograr lo anterior es necesario hacer un breve repaso y profundización del trabajo con potencias de exponente entero. Al proponer ejercicios debe tenerse en cuenta ya sea la aplicación del cálculo simple de potencias o aplicando propiedades de las mismas hasta llegar a ejercicios donde la aplicación de las propiedades nos dé una forma ventajosa para el cálculo, como el ejemplo 10 del epígrafe 1.3 pág 25 del M.E.M.

Se sugiere seleccionar ejercicios del epígrafe 1 del libro de texto u otros creados por el profesor.

En la ampliación de potencias, juega un papel fundamental la definición de raíz n - ésima, en esta definición es necesario establecer las condiciones para la existencia de las raíces de índice par e impar, es conveniente que los alumnos comprendan la diferencia que existe y su causa en los casos particulares ya conocidos por ellos (raíz cuadrada y raíz cúbica).

A este fin deben comprender:

● La raíz cuadrada no existe siempre. Cuando existe hay dos.

● La raíz cúbica existe siempre y es una sola.

Debe destacarse la diferencia entre que: $\sqrt{81}$ = 9 es siempre la raíz positiva o aritmética (x = 9) y la ecuación $x^2 = 81$ , donde x = ± 9 .

En este momento se puede aprovechar para plantear a los alumnos la relación $\sqrt{a^2}$ = $|a|$ destacándose **la tendencia errónea** de por ejemplo escribir

$\sqrt{(-9)^2}$ = - 9, resaltar que $\sqrt{\square}$ representa la raíz positiva, luego $\sqrt{(-9)^2}$ = $\sqrt{81}$ = 9.

los alumnos deben concluir que $\sqrt{a^2}$ = a. ( si a ≥ 0 ) y $\sqrt{a^2}$ = - a ( si a < 0)

**Se debe concluir entonces que:** $\sqrt{a^2}$ = $|a|$.

Después de que alumnos hayan interiorizado la idea de la raíz cuadrada o cúbica como solución de una ecuación; entonces será fácil definir la raíz n- ésima de <u>a</u> como la solución de la ecuación $x^n = a$.

En este momento después de establecida la definición (Definición 1 pág 86 del L.T.) se puede hacer el análisis de cuándo existe la raíz n-ésima y cuántas hay, en forma análoga al que se hizo con la raíz cuadrada y la raíz cúbica. Para esto se puede apoyar en el Ejemplo 2 del epígrafe 1 concluyendo con el Teorema 1 (página 87) de este epígrafe.

En este momento se aprovecha para presentar el símbolo de raíz n-ésima $[\sqrt[n]{\square}]$

Al igual que en el análisis que se realizó para plantear que $\sqrt{a^2}$ = $|a|$ se deben analizar dos o tres ejemplos para analizar que $\sqrt[2n]{a^{2n}}$ = $|a|$ y para reafirmar esto se puede utilizar el Ejemplo 4 pág 89 incisos a, c, e, y f del texto. Finalmente es conveniente analizar el cuadro resumen que aparece después del ejemplo 4.

Para la ejercitación de esta parte del Epígrafe se pueden utilizar los ejercicios 5, 6, 7, 8 y 11 del Epígrafe 1, donde el ejercicio 11 viene a resumir todo lo estudiado sobre raíz n-ésima hasta el momento.

Realizando el anterior trabajo con la raíz n-ésima, se está en condiciones de iniciar el estudio de la simplificación del índice del radical. Es conveniente que el profesor conozca que esta se utilizará en este momento solo con la intención de que el alumno inicie el desarrollo de habilidades en la simplificación de radicales, es completamente necesaria para definir la potencia de exponente racional lo cual se realizará posteriormente.

Para comprender lo anterior basta que el profesor esté consciente de que, por ejemplo, para que $3^{\frac{1}{2}}$ esté definido, tiene que ser igual a $3^{\frac{2}{4}}$ , $3^{\frac{3}{6}}$ , etc; pues como se conoce:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{n}{2n} = \cdots$$

Para introducir este procedimiento el profesor puede mediante un breve comentario hacerle ver a los alumnos la comodidad de trabajar los radicales con los índices menores posibles. Para ello pueden utilizarse expresiones como las que aparecen en el texto $\sqrt[12]{3^{24}}$ y $\sqrt[4]{3^{8}}$ ; $\sqrt[6]{2^{18}}$ y $\sqrt[3]{2^{9}}$ las cuales se pedirá calcular y comparar los resultados obtenidos como aparece en el libro de texto. En este momento se les hace ver que entre el exponente y el índice del radical existe un factor común y que si se dividen ambos por este factor el resultado final no se altera; esto mismo sucedería si se multiplican el exponente del radicando y el índice del radical por un mismo factor lo cual se puede observar si invertimos la cadena de igualdades obtenidas. Por lo que parece posible poder plantear que dada:

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$ con $a > 0$, $n, m \in Z$; $n > 1$, $k \in IN^*$.

Seguidamente se enuncia el Teorema 2, del Epígrafe 1, de la p.90 del LT10 y se demuestra, pues esto es una exigencia el programa.

Se les puede plantear a los alumnos que para algunos casos en que la base sea negativa también se cumple este teorema, solo que se tiene que cumplir una condición más y es que **n** y **kn** tengan la misma paridad(los dos pares o los dos impares) y ambas raíces existan; esto se puede mostrar considerando un ejemplo como el siguiente:

$\sqrt[16]{(-2)^8} = \sqrt[4]{(-2)^2}$ donde n = 4 y kn = 16 ambos son pares

$\sqrt[15]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-4}$ donde n = 5 y kn = 15 ambos son impares

lo cual no se cumple cuando n y kn no tienen la misma paridad como por ejemplo:

$\sqrt[6]{(-1)^2} \neq \sqrt[3]{-1}$ donde n = 3 y kn = 6 no tienen la misma paridad.

Sugerimos no abusar en el trabajo con bases negativas.

Para la ejercitación se pueden resolver los ejercicios 9 y 10 del epígrafe 1 pág. 94 u otros creados por el profesor.

Una vez terminado este trabajo se realizaría la ampliación del concepto de potencia de exponente entero a potencia de exponente racional.

Para ello se pueden realizar algunas preguntas como las siguientes:

● ¿Hasta qué clase de exponente se han definido las potencias? ¿En qué orden se ha hecho?

● ¿Qué falta?

● ¿Qué interpretación se le puede dar a expresiones como $2^{\frac{1}{2}}$ , $3^{\frac{2}{5}}$, etc?

● ¿De existir potencias como las anteriores se cumplirán también las propiedades ya conocidas?

Hacer notar a los alumno que faltan por definir las potencias de exponente racional y real, en estas clase nos ocuparemos de definir las potencias de exponente racional. Para ello hay que lograr darle sentido a expresiones tales como $3^{\frac{1}{2}}$ , $4^{\frac{2}{5}}$ de forma tal que la definición dada sea compatible con la definición de potencia de exponente entero. Esto puede hacerse por dos vías:

1era El profesor puede establece la definición y analizar que la misma es compatible con la definición de exponente entero como aparece en el texto.

2da Si las condiciones del grupo son favorables y el trabajo previo lo permite puede elaborarse la definición siguiendo la siguiente idea:

Se sabe por ejemplo que 5 = $5^{\frac{1}{4}\cdot 4}$ pues $\frac{1}{4}$ · 4 = 1.

Como se quiere que se cumplan las propiedades de las potencias ya conocidas, de tener $5^{\frac{1}{4}}$ algún sentido debe cumplirse que:

5 = $5^{\frac{1}{4}\cdot 4}$ = $\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^4$

El problema entonces debe plantearse de esta forma:

Se quiere encontrar qué valor debe tener la base de una potencia, a la que llamaremos A, para que se cumpla que:

$A^4 = 5$

Pero este problema tiene de entrada una solución, pues, según la definición de raíz

n-ésima tenemos que:

A = $\sqrt[4]{5}$

y conocemos que $\left(\sqrt[4]{5}\right)^4$ = 5.

Esto sugiere que $5^{\frac{1}{4}}$ pudiera definirse como $\sqrt[4]{5}$, es decir, $5^{\frac{1}{4}}$ = $\sqrt[4]{5}$.

Análogamente, si se tiene $5^{\frac{3}{4}}$ y se quiere que se mantengan las propiedades de las potencias ya conocidas para exponente entero, debe cumplirse que:

$5^{\frac{3}{4}}$ = $(5^3)^{\frac{1}{4}}$ y entonces $(5^3)^{\frac{1}{4}}$ = $\sqrt[4]{5^3}$

Debería definirse entonces: $5^{\frac{3}{4}}$ = $\sqrt[4]{5^3}$

Aquí se debe dirigir la atención de los alumnos hacia la relación que existe entre el numerador y el denominador del exponente de la potencia y los términos del radical.

- El denominador es el índice del radical.

- El numerador es el exponente del radicando.

En este momento ya se puede establecer en general que las potencias de exponente racional se pueden expresar en términos de radicales. Por ejemplo:

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $4^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4^2}$

Aquí se debe destacar que hemos trabajado solo con bases positivas y esto es porque las raíces tienen limitaciones cuando los radicando son negativos, hay que establecer también esa limitación en la definición de potencia de exponente racional.

Por tanto definiremos finalmente que:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ con a > 0; m, n $\in$ Z, n > 1

Esta definición tiene sentido pues incluye a la anterior, ya que si:

m es un entero, n natural y m múltiplo de n entonces $\frac{m}{n}$ es un número entero (m = kn con k $\in$ Z), es decir: $a^k = a^{\frac{k \cdot n}{n}} = \sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$.

Además, se puede simplificar el índice y el exponente ya que como $\frac{m}{n} = \frac{k \cdot m}{k \cdot n}$, debe ser que $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}}$ con a > 0, lo cual es cierto pues se cumple que:

$a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} = \sqrt[k \cdot n]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

La igualdad del centro está fundamentada por el Teorema 2 del Epígrafe 1.

Para ilustrar esta definición se puede utilizar el Ejemplo 1 del epígrafe 2, y los Ejemplos 2, 3, 3 y 5 del M.E.M, pág. 38-40 y para la fijación los ejercicios del epígrafe 2 pág. 96 del libro de texto.

Al hacerse la ampliación a potencias de exponente racional se había considerado que las propiedades se cumplían pero no se enunciaron las mismas.

Una vía posible para el tratamiento de las propiedades es indicar a los alumnos que escriban simbólicamente estas considerando que los exponentes pertenecen a Q y que las enuncien con sus palabras; el profesor debe manejar la situación para que este enunciado quede de la forma más simple posible (similar al texto).

Para la ejercitación se disponen de los ejercicios del 1 al 8 del epígrafe 3 pág. 98 y los ejercicios 1 y 2 del Capítulo.

Una vía metodológica posible para el tratamiento de las propiedades de los radicales es inferir estas de las propiedades de las potencias de exponente racional antes estudiadas:

- Producto de potencia de igual exponente.
- Cociente de potencia de igual exponente.
- Potencia de potencia.

Para ello se deben considerar las potencias con exponente $\frac{1}{n}$ y expresarlas como raíces mediante la definición de potencia de exponente fraccionario como se ilustra en el libro de texto página 103.

Después de inducidas las propiedades de los radicales se puede plantear cuando se considera que un radical está completamente simplificado según aparece en el texto y mostrar ejemplo de radicales que estén o no simplificados.

Una vez establecidas estas condiciones se debe analizar cómo se utilizan las propiedades de los radicales en la simplificación de los mismos, para lo cual el profesor se debe apoyar en las Ejemplo 1 y 2 del epígrafe 6 pág. 104 del L.T. le ejemplo 1 les permite mostrar nuevamente la reducción del índice del radical lo cual lo hará apoyándose en el Teorema 2 del epígrafe 1.

El Ejemplo 2 permite mostrar la extracción de factores del radical y en el se tiene en cuenta que pueden darse dos casos diferentes que el factor sea una potencia cuyo exponente es múltiplo del índice del radical (son raíces exactas) o que no lo sean; en este último caso el exponente del radicando debe ser mayor que el índice del radical para poder extraer factores del mismo. Tanto en un caso como en el otro el profesor debe apoyarse en las propiedades de los radicales (multiplicación de radicales de igual índice) como se ilustra en el ejemplo.

Como un procedimiento inverso a la extracción de factores del radical se puede explicar la introducción de factores en el radical para ello el profesor puede apoyarse en el Ejemplo3 del epígrafe pág 105. Aquí se debe tener presente reactivar que

a = $\sqrt[n]{a^n}$ pues es lo que se utiliza básicamente para introducir factores en el radical.

En la explicación el profesor puede orientar la conveniencia de expresar el factor exterior como una raíz con el mismo índice que el radical por el cual se multiplica y después efectuar el producto de estas raíces de igual índice.

Con los Ejemplos 4 y 5 se puede ilustrar la simplificación y la introducción de factores en el radical las cuales pueden ser analizadas por los alumnos en forma independiente y para fijar todo lo tratado en el Epígrafe 6 pueden proponerse los ejercicios de este epígrafe.

En el epígrafe 7 se encuentran la reducción de radicales a un índice común y la comparación de radicales. Para motivar el profesor puede plantear la comparación de radicales de igual índice y de diferentes índices y reactivar la comparación de fracciones con igual y diferentes denominadores como el procedimiento es similar al proceso de expresar radicales con el mismo índice.

Para ilustrar este procedimiento se puede utilizar el Ejemplo 1 del Epígrafe 7. Lo alumnos podrán concluir que una vez que los radicales están expresados con el mismo índice estos se pueden comparar fácilmente ya que basta solo con comparar los radicandos. Para ilustrar lo anterior el profesor puede utilizar el Ejemplo 2 del Epígrafe7.
Como se planteó al inicio, las últimas clases de este punto esencial completarán el trabajo con potencias en dos direcciones diferentes:

● Se indicará una vía para calcular potencias de exponente irracional. (no se darán una definición como en los restantes casos sino solo se ilustrará), insistimos, una vía para calcular.

● Se analizará la logaritmación como otra operación inversa de la potenciación.

Para lo primero se puede seguir la misma idea del texto con $3^{\sqrt{2}}$ .
Para ello:

1ro. Se buscan aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$ (por defecto y por exceso).
2do. Aplicando la propiedad de monotonía de las potencias se van calculando (si se posee calculadora es conveniente usarla o hacer uso de las incorporadas a las computadoras) en cada miembro de las desigualdades. Obsérvese que en cada caso se trata de calcular una potencia de exponente irracional.
De este modo se obtiene un valor aproximado para $3^{\sqrt{2}}$ .

Si no se posee calculadora, cómo el alumno no puede realizar esos cálculos, se le indican en el libro los valores aproximados que se obtienen y se les invita a que los compruebe en el laboratorio de computación.

Terminado de ilustrar cómo se puede obtener un valor aproximado para una potencia de exponente irracional se le debe informar a los alumnos que las propiedades estudiadas para las potencias de exponente racional son válidas también para las potencias de exponente irracional y por tanto en general para las de exponente real.

La logaritmación de verá como otra operación inversa de la potenciación y así completar el estudio referente a la misma. Para lograr esto, una vía posible es analizar con ejemplos que en la potenciación se tienen tres elementos: **la base, el exponente** y **la potencia** ($a^c = b$). Si se conoce: el exponente (c) y la potencia (b), es posible hallar la base (a) mediante la radicación, la cual es una operación inversa de la potenciación.

Se debe destacar que tanto en la potenciación como en la radicación (al igual que en todas las operaciones) se conocen dos elementos y se quiere hallar un tercero.

Se puede preguntar entonces a los alumnos:

¿Qué otra pareja de elementos se pueden conocer en la potenciación para hallar un tercero?

Después de concluido que se pueden conocer la base (a) y la potencia (b), y se quiere hallar el exponente (c), se planteará que a la **operación que nos permite esto se le llama logaritmación** y al valor buscado **logaritmo.**

Se le pedirá a los alumnos que expresen con sus palabras la definición de logaritmo, el profesor redondeará ésta dando la misma según aparece en el texto página 101 y también la expresión simbólica de ella. Vista ya la expresión simbólica de la definición se analizará la identidad fundamental $(a^{\log_a b} = b)$ planteando que en la potencia se podría sustituir c por $\log_a b$ sin que la misma se altere. Para ilustrar la definición se puede utilizar el Ejemplo 1 del Epígrafe 5 página 102.

Con el esquema siguiente e puede ilustrar mediante un ejemplo, la relación entre la potenciación y sus dos operaciones inversas.

Potenciación

$3^4 = 81$

$\downarrow$

Operaciones inversas

| Radicación | Logaritmación |
|---|---|
| $\sqrt[4]{81} = 3$ | $\log_3 81 = 4$ |
| Se conocen la potencia (81) y el exponente (4) y se quiere hallar la base (3) | Se conocen la potencia (81) y la base (3) y se quiere hallar el exponente (4) |

Para la ejercitación se pueden utilizar los ejercicios del 1 al 4 del epígrafe 5 página 102 y el ejercicio 7 de los ejercicios del capítulo página 140 así como los ejemplos y ejercicios del epígrafe 1.4.3 del MEM página 50.

Se debe y tener presente que la logaritmación solo se estudiará como operación inversa de la potenciación y se calcularán logaritmos sencillos, pues el estudio de las propiedades y de la función correspondiente se realizará en onceno grado.

***Orientaciones metodológicas para el tratamiento del cálculo con radicales.(6h/c)***

El contenido de este punto esencial aparece en los Epígrafes del 8 al 10 del Capítulo 2 del libro de texto y en el Epígrafe 1.4.2 del M.E.M.

Lo esencial que se debe lograr en este punto esencial es el desarrollo de habilidades en el cálculo con radicales en las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y la racionalización de denominadores.

Una condición previa para la adición y sustracción de radicales es la definición de radicales semejante; debe tratarse que sean los propios alumnos quienes den esta definición. Una vía metodológica para ello es lograr que la obtengan por analogía con la definición de términos semejantes. Para ello primeramente se recordaría cuál es la definición que conocen de términos semejantes y que planteen ejemplos de ellos, es importante pedir ejemplos de términos que no son semejantes.

También en la adición y sustracción de radicales hay que analizar el caso en que aparentemente no existen radicales semejantes y es necesario previamente transformar estos para efectuar la adición o sustracción o ambas.

Se puede trabajar el Ejemplo 2 del Epígrafe 8, así como, el Ejemplo 1 del epígrafe 1.4.2 del M.E.M.

Para la multiplicación y división de radicales se trabajarán analizando previamente con el mismo índice y posteriormente con diferentes índices.

Como en este momento ya los alumnos conocen la simplificación de radicales todas las respuestas que se den a los ejercicios tienen que estar simplificadas.

Teniendo en cuenta que la racionalización de denominadores será lo último que se trate en este punto esencial, las respuestas quedarán sin racionalizar, pero los radicales que se encuentren en el denominador deben estar simplificados.

Una vez dada la racionalización las respuestas quedarán racionalizadas, es decir, completamente simplificadas.

La racionalización de denominadores se .puede introducir como aparece en el texto en el epígrafe 10; o como aparece en los Ejemplos 1 y 2 de la página 46 y 47 del M.E.M Desde este momento toda respuesta que se dé a cualquier ejercicio debe quedar racionalizada y por tanto completamente simplificada.

Sugerimos presentar ejercicios combinados, como por ejemplo:

*. Calcula:*

*a)* $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{128}$ *b)* $2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+\sqrt{75}$ *c)* $\sqrt{192a}-\sqrt{75a}+\sqrt{12a}$

*d)* $\dfrac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\cdot\sqrt[6]{16}}{\sqrt{\dfrac{1}{64}}}$ *e)* $\left(\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75}\right)\cdot\sqrt{3}$ *f)* $\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}\right):\ 2\sqrt{5}$

*g)* $\dfrac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{54}-\sqrt{150}$

Los alumnos deben ser capaces de hacer también ejercicios como el 1, 3, 4, 22, 23, 24, 30, 31,32, 33, 35,36 y 37 del epígrafe 1.4, del MEM, además de otros de mayor nivel de dificultad.

**UNIDAD 2:** Trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones (48 h/c)

**Introducción**

El trabajo con variables es una de las herramientas más importantes para el cálculo en la matemática. Es por ello que a lo largo de toda la enseñanza se le presta especial atención. En la secundaria básica, se inicia el estudio sistemático de los procedimientos elementales del cálculo con variables como son las operaciones algebraicas y la resolución de diferentes tipos de ecuaciones (lineales y cuadráticas) y sistemas de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones con dos variables.

En décimo grado, se repasa lo anterior y se profundiza en las operaciones de cálculo con variables, especialmente en la división, incluyendo el estudio de la Regla de Ruffini, la que se utiliza también en la descomposición factorial de polinomios, con vista a la resolución de ecuaciones fraccionarias enteras de orden mayor e igual a 3. Se trabajan nuevas clases de ecuaciones e inecuaciones. En particular se estudian las ecuaciones fraccionarias, las inecuaciones racionales enteras y fraccionarias y las ecuaciones con radicales. Además se profundiza en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales al estudiar métodos para la resolución de sistemas de tres ecuaciones con tres variables y los sistemas cuadráticos.

**Bibliografía Básica de la Unidad 2**

- Libro de Texto de Décimo grado (Del Capítulo 1, epígrafe 3 al 15 y del Capítulo 2, epígrafe 11)
- Manual de Ejercicios de Matemática (Capítulo 2. y 3)
- Teleclases de: Décimo grado de la 95 a la 126 y de Onceno grado de la 1 a la 14 del curso 2004 - 2005

**Estructura interna de la unidad 2**

Polinomios

- **Operaciones básicas**
  Valor numérico.
  Reducción de términos semejantes
  Uso de paréntesis
  Multiplicación y División de Polinomios

- **Factorización**
  Factor común
  Diferencia de cuadrados
  Suma y Diferencia de cubos
  Trinomios cuadrados perfectos
  Trinomios de la forma $x^2+px+q$
  Trinomios de la forma $mx^2+px+q$
  Polinomios de 4 o más términos

Ecuaciones e inecuaciones racionales enteras

Ecuaciones lineales
Ecuaciones cuadráticas
Ecuaciones Modulares

Resolución de Problemas

Inecuaciones
Inecuaciones lineales
Inecuaciones cuadráticas

Fracciones algebraicas

Simplificación
Multiplicación y División
Adición y Sustracción

Ecuaciones e inecuaciones racionales fraccionarias

Ecuaciones fraccionarias      Inecuaciones fraccionarias

Ecuaciones con radicales

Sistemas de Ecuaciones
Lineales
Cuadráticos

Resolución de Problemas

Esquema

---

De esta estructura se derivan las siguientes unidades temáticas.

- Polinomios/ Ecuaciones e inecuaciones racionales enteras
- Fracciones algebraicas/ Operaciones con fracciones algebraicas/ Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias

- Ecuaciones con radicales
- Sistemas de ecuaciones

| Sub. unidad | Contenidos | h/c |
|---|---|---|
| 2.1 | Traducción de situaciones de la vida real al lenguaje algebraico y viceversa. Definición de ecuación, dominio básico de una ecuación, solución de una ecuación, conjunto solución. Ecuaciones equivalentes, transformaciones que pueden realizarse en una ecuación. Resolución de ecuaciones lineales. Ecuaciones modulares. Ecuaciones cuadráticas que requieren de la adición, sustracción y multiplicación de polinomios (se incluyen los productos notables: $(a \pm b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a \pm b)^3$, $(x + a)(x + b)$, así como la descomposición factorial ( factor común, factor común por agrupamiento, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, completamiento cuadrático, trinomios de las formas $x^2 + px + q$ y $mx^2 + px + q$ $(m \neq 0)$). Teorema de Vieta. Fórmula de resolución de la ecuación cuadrática (deducción). Cantidad de raíces de esta ecuación a partir del signo del discriminante. Inecuaciones lineares. Ejemplos de inecuaciones modulares. Inecuaciones cuadráticas. División de polinomios. Regla de Ruffini o Horner. Descomposición de polinomios que contengan factores de la forma $(x - a)$. Teorema del resto. Suma y diferencia de cubos. Resolución de ecuaciones algebraicas de orden superior a 2. Despeje en fórmulas. Ejemplos de inecuaciones raciones enteras de orden superior a 2. Problemas. | 17 h/c |
| 2.2 | Concepto de fracciones algebraicas. Cambios de signos en una fracción que garantizan que su valor permanezca invariante. Simplificación de fracciones algebraicas. Multiplicación y división de fracciones algebraicas. Adición y sustracción de fracciones algebraicas. Operaciones combinadas con fracciones algebraicas. Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias. Despeje en fórmulas. Problemas que conducen a ecuaciones fraccionarias. | 15 h/c |
| 2.3 | Ecuaciones con radicales. Aplicaciones. Ecuaciones con radicales. Necesidad de realizar la comprobación en una ecuación con radicales, al elevar ambos miembros a una potencia de exponente par. Resolución de ecuaciones con radicales por reflexiones lógicas. Ecuaciones con radicales que requieran una sola elevación al cuadrado. Ecuaciones con radicales que requieran más de una elevación al cuadrado. Ecuaciones con radicales fraccionarias. Problemas. | 6 h/c |
| 2.4 | Definición de sistemas de ecuaciones lineales, solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, sistemas equivalentes. Transformaciones que pueden realizarse en un sistema. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables. Sistemas cuadráticos. Problemas que conducen a ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas. | 10 h/c |

**Objetivos de la unidad 2**

- Los estudiantes deben ser capaces de:
- Hallar los valores numéricos de polinomios, términos con radicales y fracciones algebraicas para valores dados de las variables, previa determinación de su dominio de definición en el caso de estas últimas.
- Calcular con polinomios y con fracciones algebraicas con seguridad y rapidez, como vía de simplificar los cálculos y de resolver ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, lo que requiere dominar las operaciones con polinomios y la descomposición en factores.
- Aplicar las operaciones fundamentales con variables a la representación de situaciones propias de la actividad práctica y a la interpretación de información dada de manera simbólica.
- Plantear ecuaciones e inecuaciones que satisfagan determinadas condiciones sobre la base del dominio de los conceptos ecuación (inecuación), dominio básico de una ecuación (inecuación), ecuaciones equivalentes (inecuaciones equivalentes), solución y conjunto solución de una ecuación (inecuación).
- Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales, modulares (sencillas), cuadráticas, fraccionarias, ecuaciones con radicales y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticos.
- Interpretar geométricamente las soluciones de las inecuaciones lineales o cuadráticas en una variable, así como de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.
- Justificar la vía de solución, los procedimientos y las soluciones obtenidas en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, así como demostrar teoremas relativos al trabajo con estos objetos matemáticos.
- Resolver problemas de la vida práctica de carácter político ideológico, económico-social y científico - ambiental, que se modelen con ecuaciones e inecuaciones lineales, modulares (sencillas), cuadráticas y fraccionarias, así como con ecuaciones con radicales y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticos.

En el tratamiento de esta unidad es esencial que los alumnos desarrollen sus habilidades de cálculo con expresiones algebraicas, en particular con polinomios, y las apliquen en la simplificación y cálculo con fracciones algebraicas, en la solución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticos; así como en la solución de ejercicios con texto y problemas.

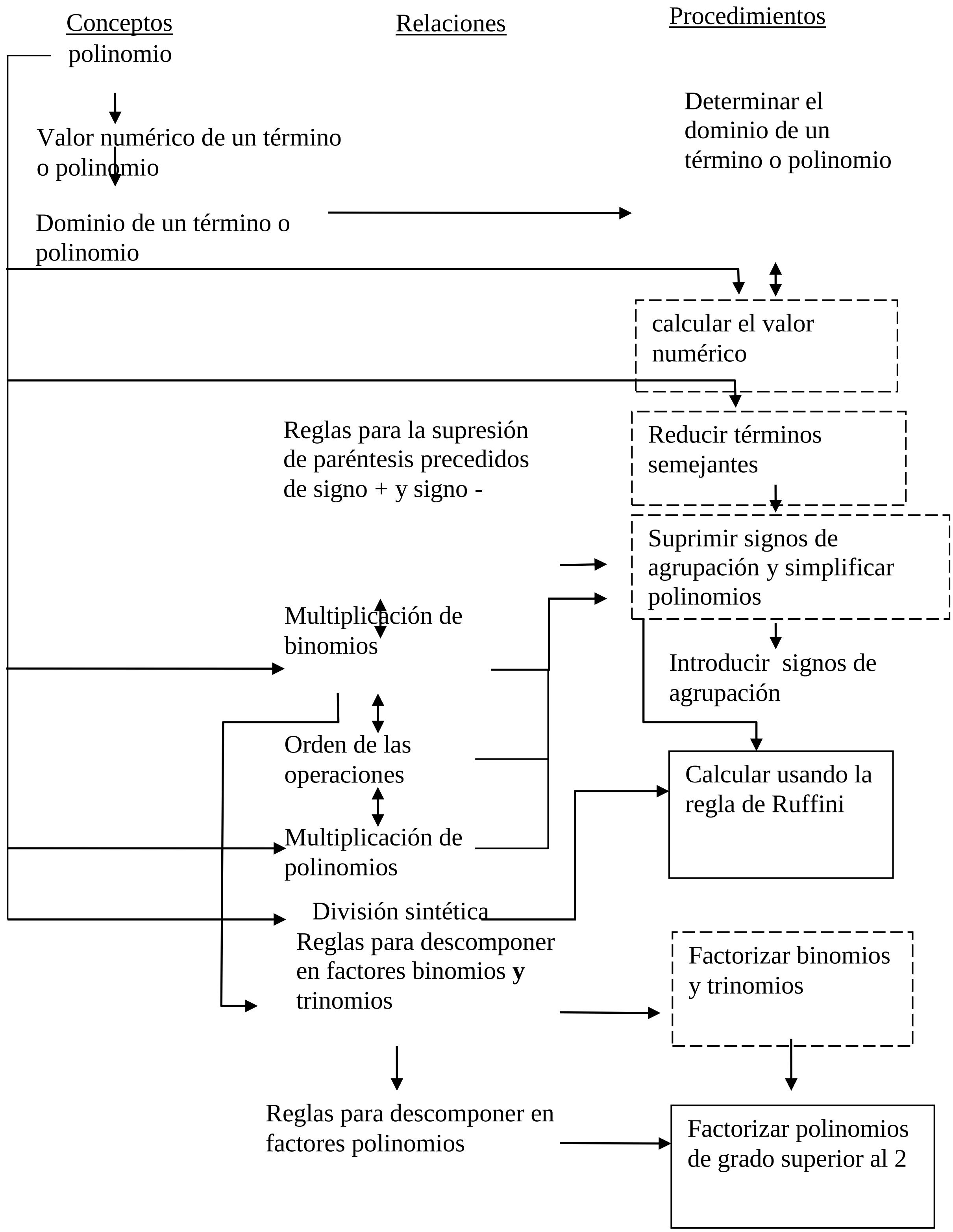
Para lograrlo es necesario que los estudiantes sean capaces de:

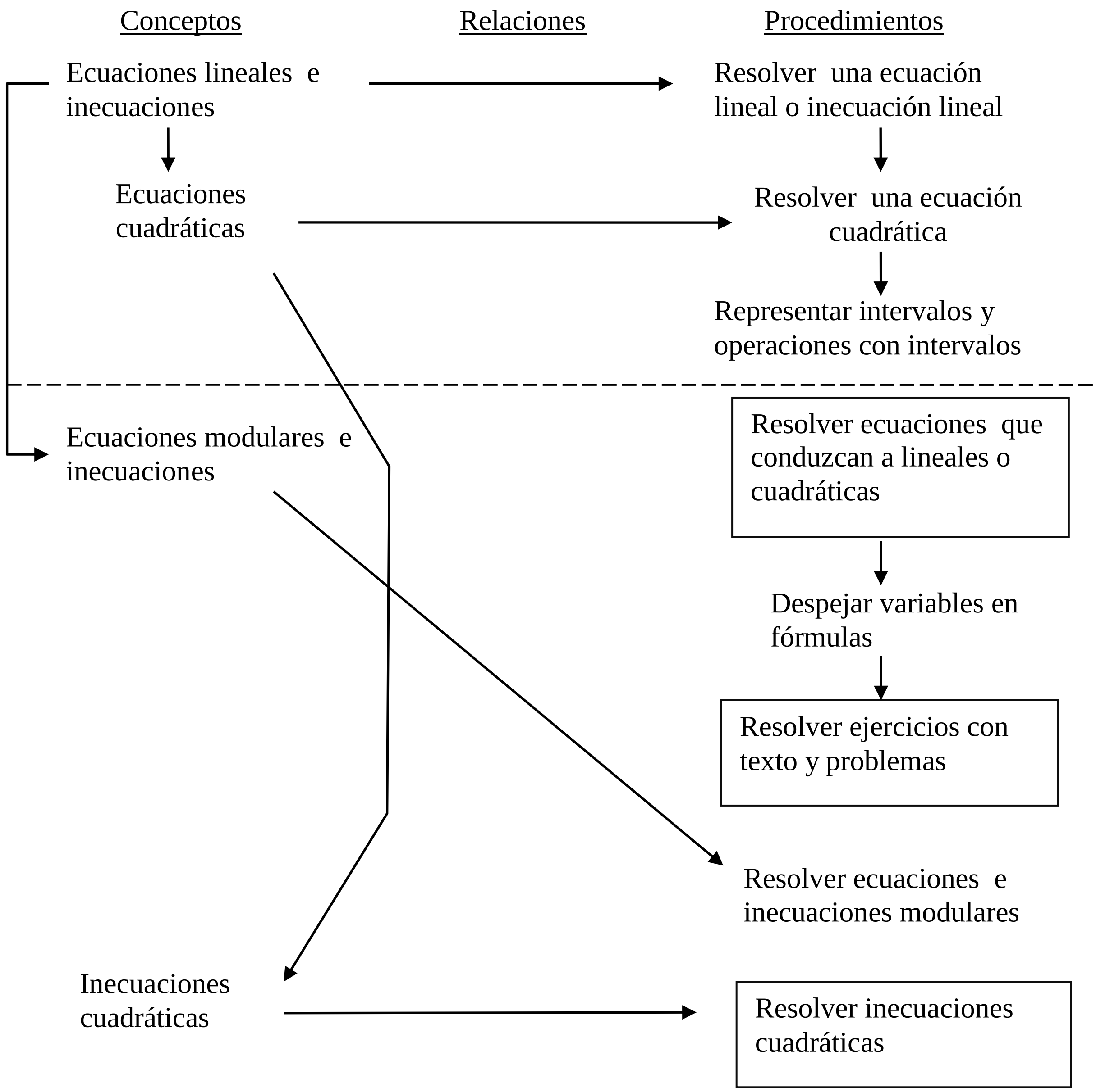
- Determinar valores numéricos de polinomios, términos con radicales y fracciones algebraicas para valores dados de las variables.
- Determinación de dominio de definición de términos con radicales y fracciones algebraicas.
- Operar con polinomios con seguridad y rapidez, en especial, aplicar el procedimiento de la división sintética.
- Descomponer en factores polinomios de más de tres términos.
- Simplificar fracciones algebraicas y realizar operaciones con ellas.
- Determinar si dos ecuaciones, inecuaciones o sistemas de ecuaciones son equivalentes.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales, modulares (sencillas), cuadráticas, fraccionarias y ecuaciones con radicales en diferentes dominios básicos de solución.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticos.

● Despejar fórmulas.
● Formular y resolver ejercicios con texto y problemas que se modelan por medio de las clases de ecuaciones e inecuaciones estudiadas y de sistemas de ecuaciones con dos (o tres) ecuaciones con dos (o tres) incógnitas y cuadráticos.
● Determinar parámetros que aparecen en ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones que satisfacen determinadas condiciones.
● Argumentar y en particular, demostrar proposiciones, utilizando adecuadamente la terminología y simbología matemáticas.
● Interpretar geométricamente las soluciones de las inecuaciones lineales o cuadráticas en una variable y de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

**ORIENTACIONES METODOLÓGICAS PARA EL DESARROLLO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS**

2.1 POLINOMIOS/ ECUACIONES E INECUACIONES RACIONALES ENTERAS (17 H/C)






Esquema

El contenido de la primera parte de este punto esencial se encuentra en los epígrafes del 3 al 7 del Capítulo 1 del Libro de Texto y en el M.E.M, epígrafe 2.2 (de la página 80 a la 100). La segunda parte aparece en los epígrafes del 10 al 12 del texto (exceptuando las fraccionarias que se darán en la temática 2.4).y en los epígrafes 2.3.1, 2.3.3, 2.4.1y 2.4.3 del M.E.M

Esta unidad es prácticamente un repaso de los procedimientos de solución de ecuaciones e inecuaciones y la profundización está dada por el nivel de la ejercitación y el procedimiento de resolución las ecuaciones modulares y de las inecuaciones cuadráticas y modulares que por primera vez se estudian en este grado.

En las primeras clases lo fundamental que debe lograr el profesor es que los alumnos comprendan el procedimiento para hallar el valor numérico de una expresión algebraica, y que puedan reconocer y reducir términos semejantes, que desarrollen habilidades en la simplificación de polinomios, mediante la realización previa de operaciones básicas.

El tratamiento de este contenido se hará a partir de un repaso en que la selección de los ejercicios propicie la participación activa de los estudiantes. Es importante que los alumnos comprendan desde un inicio la utilidad de las operaciones con polinomios y la descomposición factorial, por lo que se debe comenzar subrayando en algún ejemplo concreto la utilidad de lo que se estudia en cada momento, por ejemplo, para la resolución de aquellos tipos de ecuaciones, cuyos procedimientos de resolución han trabajado en S. Básica. Esto no excluye que después la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas se consolide de manera independiente para que quede bien asegurado todo lo que tiene que ver con su tratamiento.

Se pueden analizar los ejemplos del epígrafe 3 del texto, precisando el concepto de valor numérico y la definición del dominio de una expresión algebraica. Los ejercicios del 1 al 6 del epígrafe 3 posibilitan ejercitar adecuadamente estos contenidos.

Para el tratamiento de la supresión de signos de agrupación, la simplificación de expresiones algebraicas, fundamentalmente polinomios, mediante la realización de las operaciones básicas; esta habilidad se debe ir combinando con el caso en que aparezca un factor monomio delante del signo de agrupación y destacar el uso de la propiedad distributiva en este caso. La introducción de términos dentro de signos de agrupación, no se ha considerado esencial, aunque es conveniente ilustrar mediante algún ejemplo cómo se procede.

Para la ejercitación pueden seleccionarse de los ejercicios del epígrafe 3 y 4 del texto, así como, los ejemplos y los ejercicios del epígrafe 2.2 del M.E.M u otros creados por el profesor según las diferencias individuales de sus grupos.

Otra forma de eliminar signos de agrupación que debe ser activada, es cuando estos se utilizan para indicar productos. Aquí, hay que recordar cómo se multiplican los binomios y en especial los productos notables conocidos por los estudiantes:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad\qquad$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

El ejercicio 6 del epígrafe 4 (página16) es análogo al 4 y al 5, pero la situación está expresada mediante un texto. En el ejercicio 7 aparecen paréntesis múltiples combinados con algunos productos.

Para concluir estas clases debe extenderse, mediante ejemplos, la multiplicación de polinomios cuando al menos uno de los factores (o ambos) no son binomios.Para ello es necesario aclarar que en el libro de texto (ver Ejemplo 1, Epígrafe 5) se ha utilizado un esquema de cálculo similar al que usan para el producto de dos binomios (aplicando sistemáticamente la propiedad distributiva en el producto de un monomio por un polinomio) pero colocando convenientemente (uno debajo del otro) los términos que son semejantes para facilitar su reducción.

El análisis del Ejemplo 1b) es importante también, pues ahí se ilustra la necesidad de ordenar convenientemente los términos (de mayor a menor exponente) y dejar los espacios en blanco correspondientes a las potencias que faltan (previamente debe haberse recordado qué es un polinomio, su grado y cómo se ordenan sus términos)

Es importante que el profesor sepa que el esquema anterior no es obligatorio, pues el alumno puede seguir multiplicando como lo hacía cuando eran binomios (colocando uno a continuación del otro los productos parciales que obtiene) que es indudablemente más cómodo.

Se debe obtener y demostrar el Teorema de Vieta; además se deben tratar el binomio al cubo y el trinomio al cuadrado, completando así los productos notables. Por último se deben proponer que efectúen los siguientes productos y que enuncien con sus palabras las reglas que se infieren de los resultados obtenidos:

a) $(x + a)(x - b)$ b) $(ax + b)(cx + d)$

c) $(a + b)^2 (a + b)$ d) $(a - b)^2 (a - b)$ e) $(a + b + c) (a + b +c)$

Los ejercicios 1 y 2 del Epígrafe 5, así como los Ejemplos 7 y 8 del M.E.M (páginas 86 - 87) y otros que el profesor pueda crear, deben ser propuestos a los alumnos para desarrollar sus habilidades de cálculo.

Para el tratamiento de la Regla de Ruffini o de la división sintética que se utiliza para dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x – a)$, puede partirse de recordar el procedimiento de dividir un polinomio por un monomio, y de un polinomio por un binomio, a partir de un ejercicio de división similar al Ejemplo 9 del M.E.M., página 88, o similar al que aparece en el texto( lo que a la vez debe servir de motivación para lo que se hará después).

Debe informarse a los alumnos la idea de representarlo en un esquema más cómodo donde solo aparezcan los coeficientes y el valor de *a* en $x - a$, destacando su relación con lo anterior y decirles que se llama esquema de la división sintética por la forma simple en que se puede expresar el procedimiento de dividir.

*Descomposición factorial*

Este punto esencial aparece en los Epígrafes 6 y 7 del libro de texto; debe tenerse presente que el mismo tiene dos aspectos:

● Un repaso de los casos de factorización estudiados en noveno grado (factor común, diferencia de cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, trinomios de la forma $x^2 + px + q$ y $mx^2 + px + q$ $(m\neq0)$ y la combinación de casos)

● Una profundización que comprende la descomposición factorial de polinomios reduciéndolos a casos conocidos mediante agrupamiento, la aplicación de la Regla de Ruffini y/o la suma o diferencia de cubos.

En el repaso el profesor puede reactivar los casos simples de descomposición factorial, partiendo de situaciones problemáticas, pues no se trata de darlos nuevamente como se hizo en noveno grado. Con este fin puede seleccionar sistemas de ejercicios escogidos del Epígrafe 6 del texto. Desde este subunidad temática se puede proponer la resolución de ecuaciones racionales enteras de tercer o cuarto grado.

Es importante que recuerden que cuándo se descompone en factores, es decir, se transforman sumas en productos, es conveniente seguir un orden, como el que aparece en los ejemplos del 12 al 19 de la página 91 a la 96 del M.E.M.; concluyendo con el **cuadro resumen de la página 96**.

En la profundización, el método de trabajo puede consistir en ejercitar por separado cada caso de descomposición, aunque al final es necesario combinarlos para que los alumnos aprendan a reconocerlos. Se recomienda poner ejercicios donde los términos de los polinomios no estén ordenados atendiendo a su grado, y donde intervengan incluso varias variables.

Para la ejercitación deben seleccionarse ejercicios seleccionados del 1 al 4 del epígrafe 7 del libro de texto (u otros similares) y del Epígrafe 2. 2 del M.E.M. Para los alumnos más aventajados pueden proponerse incisos del ejercicio 5 del Epígrafe 7 del texto, donde se combinan otros casos de descomposición factorial estudiados.

También se pueden poner ejercicios de demostración como el ejemplo 9 de la p.141 del M.E.M.

En la ejercitación de Ruffini aparecen polinomios de más de cuatro términos, que aunque no se exige, pueden proponerse para ilustrar que se procede de la misma manera.

Ecuaciones e inecuaciones racionales enteras

Lo fundamental que debe lograr el profesor en estas clases es que los alumnos continúen desarrollando habilidades en la solución de ecuaciones e inecuaciones. En esta parte se dedica especial atención a la solución de problemas.

Es conveniente, antes de iniciar la resolución de las ecuaciones lineales, modulares y cuadráticas, recordar brevemente el procedimiento de solución:

Puede introducirse a través de un problema o a partir de ejemplos de cada tipo de ecuación para que la identifiquen y elaboren con sus palabras un procedimiento general para su resolución, concluyendo que:

En la lineal: se despeja la variable, que solo aparece elevada al exponente uno, transponiendo los términos que la acompañan.

Por ejemplo: $3x - 9 = 27$

$$3x = 27 + 9$$
$$3x = 36$$
$$x = 12$$

En las modulares: Para introducir las ecuaciones modulares se debe reactivar el concepto de módulo o valor absoluto, es decir que: $|a| = a$ sí $a \geq 0$ $|a| = -a$ sí $a < 0$

Los propios alumnos pueden inferir a través de ejemplos, el procedimiento para la solución de estas:

Por ejemplo: a) $|4x - 10| = 6$

$4x - 10 = 6$ o $4x - 10 = -6$ (resultando dos ecuaciones lineales)

luego, $x = 4$ o $x = 1$

b) $|x - 4| = -1$ (Imposible, porque $|a| \geq 0$ )

En las modulares se aplica la definición de módulo o valor absoluto.

En las cuadráticas, debe aparecer una variable elevada al exponente dos. Para resolverla no se despeja la variable, sino que hay que reducirla a dos ecuaciones lineales y resolver estas o utilizar la fórmula de resolución. En ambos casos primero se transforma de modo que un miembro sea cero.

Por ejemplo: a) $2x^2 + 6x = 8$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x + 4)(x - 1) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad ó \quad x - 1 = 0$$
$$x = -4 \quad ó \quad x = 1$$

Otra diferencia es que las lineales siempre tienen una única solución si su dominio es IR y las cuadráticas pueden tener dos soluciones, una solución o ninguna solución, en dependencia del signo del discriminante (positivo, cero o negativo respectivamente). Esta situación debe quedar clara en la selección de los ejercicios.

Es bueno también que el profesor aclare que en estas ecuaciones, la comprobación se hace solo para autocontrolar el trabajo de cálculo (o el procedimiento utilizado) y saber si se cometió o no algún error, pero que desde el punto de vista matemático no es necesaria. Posteriormente verán ecuaciones donde la comprobación sí es obligatoria.

Una selección entre los incisos de los ejercicios 1 y 2 del Epígrafe 10, permitirá activar las habilidades de los alumnos en la solución de ecuaciones que conducen a lineales y cuadráticas. En el epígrafe 2.3.1 del M.E.M se trabajan las ecuaciones lineales y en el ejemplo 2 b) de la página 103 se plantea una ecuación modular que conduce a dos ecuaciones lineales. Para la ejercitación pueden seleccionarse además, ejercicios similares a los ejemplos del epígrafe 2.4.1 del M.E.M. sobre ecuaciones cuadráticas.

Pueden proponerse ejercicios como el siguiente que involucra el concepto de ecuaciones equivalentes:

¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son válidas para todo número racional x?¿Cuáles son equivalentes a 10x - 4(x - 2)=50?

$(1) - x = 7$

$(2) - 4(x - 1) = 46 - 10x$

$(3)\ 4x + 8 = \dfrac{-8x + 16}{2}$

$(4) - 4(x - 2) + x(x - 2) = (x - 4)(x - 2)$

$(5)\ (x - 2)^2 - 15x = (x - 23)(x - 2)$

Da ejemplos de ecuaciones equivalentes a 10x-4(x-2)= 50. Fundamenta tu respuesta.

Puede además incluirse algún despejo de variable en una fórmula que no es más que resolver una ecuación que expresa algún principio, regla o resultado general de índole matemática, física, química, biológica o relativa a cualquier otra ciencia, por lo que saberlas despejar resultan de gran utilidad (Seleccionar del ejercicio 3 del epígrafe 10 u otros creados por el profesor).

Es importante analizar que dentro de las ecuaciones algebraicas diferenciamos las ecuaciones racionales enteras, que reciben este nombre porque con la variable solo se realizan las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación (con exponente natural): $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$

$n \in IN$, $x \in IR$, $a_i \in IR$ ($i$ = 1, …, $n$)

En este caso $n$ es el grado de la ecuación. Cuando se estudie el dominio de los números complejos se tomará este como dominio de definición de las variables.

Podrán reflexionar con los alumnos ¿Las ecuaciones lineales y cuadráticas son ecuaciones racionales enteras? (Son casos particulares de ecuaciones racionales enteras). Para las ecuaciones de tercer y cuarto grados no estudiaremos las fórmulas de resolución mediante radicales, trataremos de aplicar en lo adelante lo estudiado sobre descomposición en factores y la división de un polinomio por un binomio, en particular, lo relativo a la regla de Ruffini. Debe comentarse que las ecuaciones de grado igual o superior al quinto no tienen solución mediante radicales.

El procedimiento para la resolución de problemas esta resumido en el libro de texto en el recuadro de la página 52.

En la ejercitación del Epígrafe 11 los problemas del 1 al 24 conducen a una ecuación lineal y el resto a ecuaciones cuadráticas. En la selección que el profesor haga para sus clases, debe combinarlas para que el alumno realmente razone y no sepa a priori de qué tipo se trata, además, de proponer algún problema de corte geométrico, como por ejemplo:

En un terreno que tiene forma rectangular, cuya área es 778,24 $m^2$, el largo excede en 4,8 m al ancho. Halla las dimensiones del terreno.

Los problemas de tanques y de disolución como los que se ilustran en los Ejemplos 4 y 5 del texto del Epígrafe 11 se deben resolver.

*Inecuaciones lineales, modulares y cuadráticas.*

Lo esencial en este punto esencial es que dominen el procedimiento de resolución de inecuaciones, especialmente las cuadráticas y las modulares que son las que aprenden por primera vez en este grado. En este caso se centra la atención en la resolución de inecuaciones que conducen a las inecuaciones lineales y cuadráticas ya conocidas

Al tratamiento de las inecuaciones lineales no debe dedicársele mucho tiempo, solo se debe activar el procedimiento ya conocido y destacar sus analogías y diferencias con el procedimiento de solución de la ecuación. Es esencial insistir en que al transponer el coeficiente de la variable el signo se mantiene o se invierte según el signo del coeficiente sea positivo o negativo respectivamente. Es importante además precisar que de no decirse lo contrario, se asumirá que el dominio de definición de las variables es el dominio de los números reales y que la solución se representa gráficamente mediante un intervalo.

El ejercicio 1 del Epígrafe 12 es apropiado para activar las habilidades de los alumnos en la solución de inecuaciones lineales, así como los ejemplos y ejercicios del Epígrafe 2.3.3 (página 120 del M.E.M).

En relación con las inecuaciones modulares debe quedar primeramente clara la definición de valor absoluto, es decir:

**1) $|x| \leq c$ entonces $-c \leq x \leq c$ 2) $|x| \geq c$ entonces $x \leq -c$ ó $x \geq c$**

Se recomienda proponer el ejemplo 5 (p.123 del M.E.M.) y el ejercicio 38 (p.132 del M.E.M) u otros similares.

Se sugiere demostrar la desigualdad triangular, planteando un ejercicio como el siguiente:

Demuestra que $|a+b| \leq |a| + |b|$, $a \in Q$, $b \in Q$, teniendo en cuenta que para todo número racional a se cumple: $-|a| \leq a \leq |a|$.

El tratamiento de las inecuaciones cuadráticas se debe apoyar en el tratamiento de las funciones cuadráticas que ya conocen de noveno grado, para que comprendan más fácilmente lo racional del procedimiento para su resolución.

Es importante analizar los signos del trinomio de segundo grado con coeficiente positivo. Para ello pueden apoyarse en las explicaciones que aparecen en el epígrafe 12 y en la figura 1.11 que ilustra los tres casos posibles.

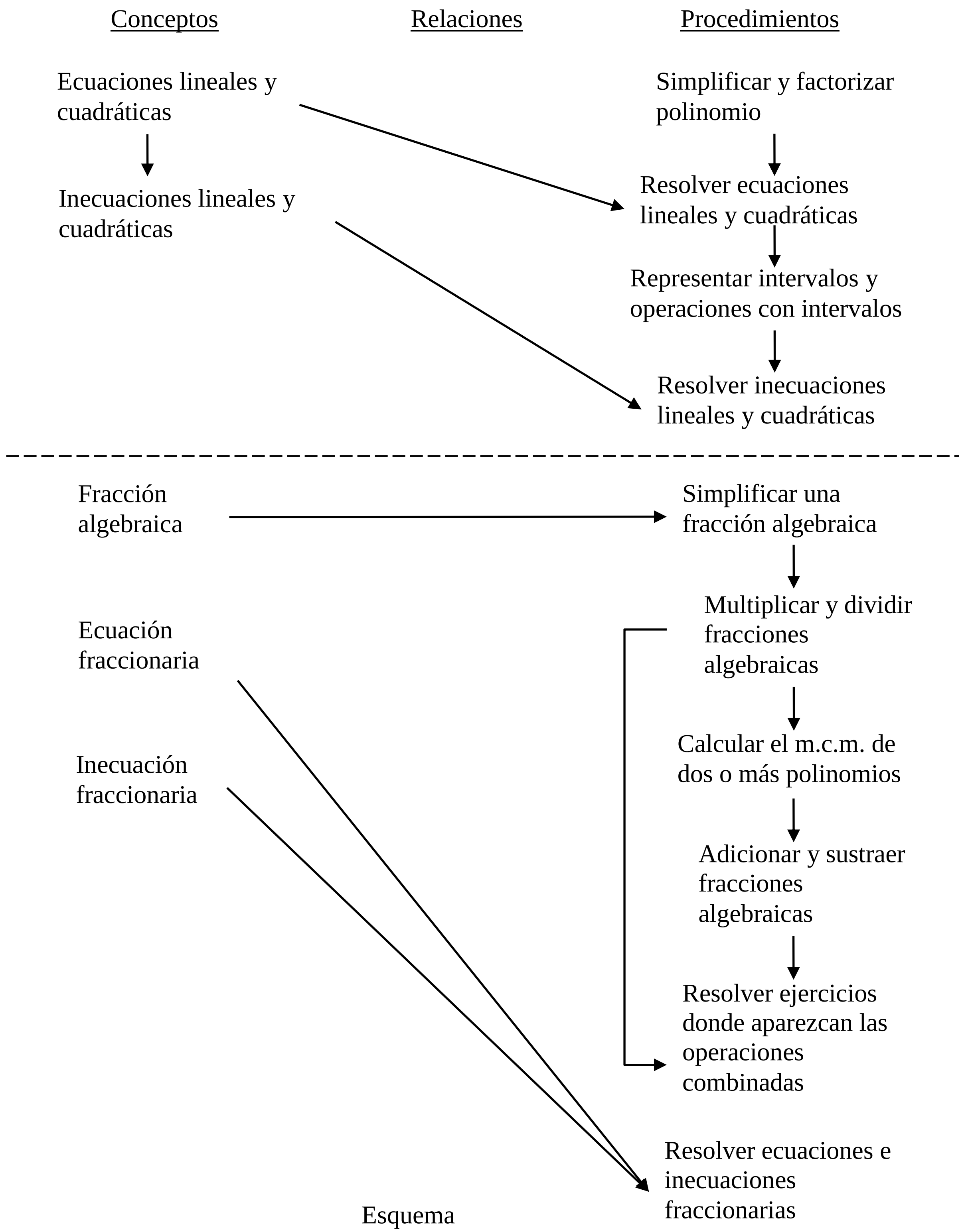
El análisis del Ejemplo 2 del texto (página 61) muestra las dificultades más comunes que se presentan en la solución de inecuaciones cuadráticas. En su análisis es muy importante destacar que cuando un factor está elevado a exponente par, su signo siempre es positivo o es cero (Ejemplos 2 c y d). En el Ejemplo 2e) se ilustra el caso en que el signo del trinomio es positivo y el uso del cálculo del discriminante para decidir rápidamente este hecho.

El Ejercicio 2 del epígrafe 12 presenta una variedad de ejercicios que son adecuados para desarrollar en los alumnos habilidades en la solución de estas inecuaciones.

Para los alumnos más aventajados sugerimos orientar los ejercicios del 55 al 61 del M.E M (página 171-172) que son de aplicación y/o demostración de este contenido; pueden además seleccionarse ejercicios del epígrafe 2.4 y del Capítulo 2.5 del M.E.M.

**2.2 Fracciones algebraicas/ Operaciones con fracciones algebraicas/ Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias (15h/c)**

En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática




Esquema

<u>Simplificación y  cálculo  con fracciones (9h/c)</u>

El contenido de estos puntos esenciales aparecen en los epígrafes 8, 9 ,10 y 12 del libro de texto.

Lo fundamental que debe lograr el profesor en estas clases es que sus alumnos continúen desarrollando habilidades en la descomposición factorial y la apliquen en la simplificación y la multiplicación y división de fracciones, y que aprendan a adicionar y sustraer fracciones algebraicas.

Debe partirse de problemas que ilustren la utilidad de lo estudiado. En estas clases el método debe ser la ilustración mediante ejemplos y la ejercitación en forma independiente.

Los Ejemplos 1 y 2 del epígrafe 8 pueden ser utilizados para ilustrar las cuestiones básicas que son:

● La simplificación de monomios
● La necesidad de descomponer en factores para simplificar
● La posibilidad de simplificar mediante un cambio previo de signos

En la multiplicación y división hay que tener en cuenta los tres aspectos anteriores y las reglas de cálculo respectivas como se ilustra en el ejemplo 2.

En la adición y sustracción hay que garantizar como una condición previa que los alumnos sepan determinar el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios. Para ello es necesario que comprendan la completa analogía que existe con el procedimiento respectivo en aritmética:

16 y 24 $\quad 16 = 2^4$ ; $24 = 2^3 .3$ $\quad$ m.cm: $3.\ 2^4$

$x^2 - 9$ y $x^3 - 3x^2$ $\quad x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ ; $x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$ $\quad$ m.c.m: $x^2 (x+3)(x-3)$

En ambos casos se descompone en factores y se toman todos los factores, comunes y no comunes, con su mayor exponente.

La ejercitación del Epígrafe 8 es adecuada para proponer a los alumnos, los ejercicios 2, 6 , 7 y 8 y del Epígrafe 9 los ejercicios 3, 4 y 5 no deben dejar de ser propuestos.

El ejercicio 2 debe proponerse, al inicio, a aquellos alumnos que presenten más dificultades en la comprensión del procedimiento. El ejercicio 6 es también importante pues se combinan las cuatro operaciones básicas con fracciones.

Es conveniente el análisis de los ejemplos 1 de los diferentes acápites del epígrafe 3.2.1 (página 196-200) del M.E.M, así como una selección de los ejercicios del epígrafe 3.2, como por ejemplo, el 5, 7, 8, 9, ….19, 20….24 y otros donde se desarrollen las habilidades de fundamentar, semejante al 16 de la p. 228.

<u>Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias</u>

Es conveniente antes de iniciar el procedimiento de resolución de las ecuaciones fraccionarias en una variable, el que sepan reconocerlas (donde aparezcan números y/o variables en el denominador, para que vean la diferencia) y concluyan que las ecuaciones fraccionarias en una variable son aquellas en aparecen fracciones algebraicas .

El análisis del Ejemplo 3 del libro de texto es muy ilustrativo, pues [i]se trata de la resolución de tres ecuaciones fraccionarias con características diferentes:

● La primera conduce a una lineal y no se introducen raíces extrañas
● La segunda conduce a una lineal, pero la solución de ella, no es solución de la original. Es una raíz extraña y se muestra la necesidad de comprobar en la ecuación original.
● La tercera conduce a una cuadrática y una de sus raíces es solución de la ecuación original y la otra no lo es, es una raíz extraña.

El Ejemplo 1 inciso b) del M.E.M (página 203) resulta también muy importante, pues es una ecuación que resulta ser una identidad.

El profesor debe dejar claro que en el procedimiento de solución de estas ecuaciones hay que eliminar los denominadores. Para ello se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo y al multiplicar, los valores de la variable que hacen cero al mínimo común múltiplo pueden ser soluciones de la ecuación transformada, pero no de la original, pues son precisamente los valores que no están en su dominio de definición.

Por lo anterior, se debe comprobar en la ecuación original o en lugar de hacer la comprobación, se debe analizar si las soluciones halladas pertenecen o no al dominio de definición de la ecuación.

Se debe recordar que para que dos ecuaciones sean equivalentes tienen que tener el mismo dominio de definición y conjunto solución. Estas ecuaciones por ejemplo, no son equivalentes.

$x+\frac{1}{x+5}=-5+\frac{1}{x+5}$ (1) $\qquad$ 2x+10=0 (2)

X=–5 no pertenece al dominio $\qquad$ x=–5

$S_1=\Phi$ $\qquad$ $S_2=\{-5\}$

Para la ejercitación pueden seleccionarse los ejercicios 4 y 5 del epígrafe 10, así como una selección de los ejercicios del epígrafe 3.2 del M.E.M.

En el tratamiento de las inecuaciones fraccionarias solo hay que explicar que para resolverlas es necesario transformarlas, al igual que en las cuadráticas, de modo que la comparación sea con cero. De este modo el problema se reduce a analizar el signo de la fracción algebraica que aparece en un miembro de la desigualdad. Para ello, como una fracción no es más que el cociente de dos polinomios es conveniente analizar dónde cambia el signo del numerador y dónde el del denominador. En el ejemplo 3a) del epígrafe 12, utilizamos el procedimiento ya conocido de analizar un trinomio de segundo grado (buscando los ceros si los tiene) y en el denominador, aparece una expresión lineal que cambia su signo a la derecha y a la izquierda de su cero. Se tiene entonces, en una recta numérica, los intervalos que los ceros determinan, x = -1, x= 2, x= 5; en este ejemplo se puede representar gráficamente, en un sistema de coordenadas, la parábola y la recta, para analizar los cambios de signo, concluyendo que en los intervalos donde los gráficos de ambas tienen el mismo signo el cociente es positivo y cuando tienen diferentes signos, el cociente es negativo.

Debe destacarse mediante los restantes incisos del Ejemplo 3 el procedimiento a seguir:

● Se transforma la inecuación de modo que la comparación sea con cero.

● Se cambian los signos del numerador (o denominador) de modo que los coeficientes de la mayor potencia de la variable sean positivos (Invertir el signo de la desigualdad si solo se cambió en el numerador o en el denominador).

● Se descompone en factores el numerador y el denominador.

● Se determinan los ceros de todos los factores, excepto los que están elevados a exponente par, que siempre son positivos.

● Se decide el signo de cada intervalo (de los determinados por los ceros) a partir del primero, comenzando por la derecha, que siempre es positivo, y alternando los signos en los restantes.

● Se escribe la solución, analizando la inecuación dada.

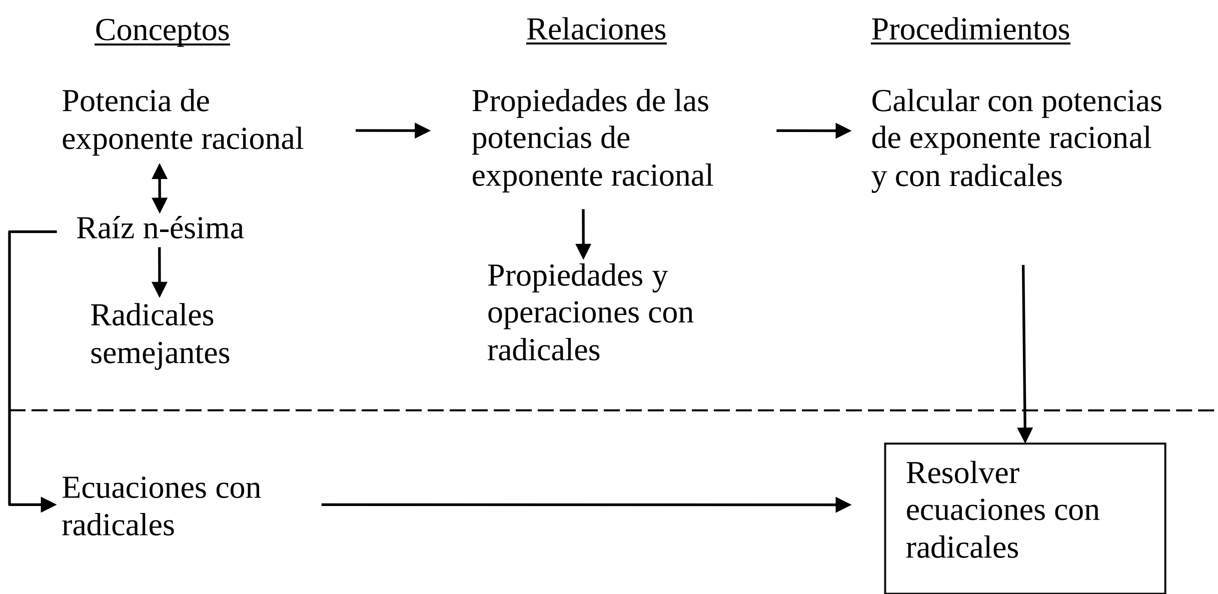
En la solución hay que tener en cuenta excluir o no los extremos de los intervalos (o valores intermedios de ellos) atendiendo a que los ceros del denominador hay que excluirlos (pues no están en el dominio de la fracción) y a que la desigualdad sea estricta o no.

El Ejercicio 3 del Epígrafe 12 es adecuado para fijar el procedimiento anterior.

El profesor puede seleccionar además, ejercicios del Epígrafe 3.2 del M.EM, los cuales permiten integrar los contenidos de esta unidad temática

**2.3. Ecuaciones con radicales** (6 h/c)

En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática




Esquema

El contenido de esta unidad temática aparece en el Epígrafe 11 del Capítulo 2 del libro de texto.

Lo esencial es que los alumnos desarrollen habilidades en la resolución de ecuaciones con radicales. La vía metodológica fundamental para su tratamiento es a partir de la resolución de problemas. También es conveniente en este momento inicial hacer un breve recuento de las clases de ecuaciones que ha estudiado hasta el momento.

Después de este recuento, puede solicitarse a los alumnos poner ejemplos de ecuaciones con radicales como un nuevo tipo de ecuación que van a estudiar, y tratar que sean ellos los que expresen el concepto de ecuación con radicales, lo cual el profesor redondeará hasta que quede expresado como aparece en el recuadro del Epígrafe 11 del texto. Se les pueden ofrecer impulsos para que ellos mismos obtengan el procedimiento general de soluciones de estos tipos de ecuaciones, de manera que lleguen la procedimiento que aparece en el texto en la p. 121.

Se debe insistir en que la comprobación de los valores encontrados es obligatoria y se hace en la ecuación original, y que esto es necesario porque en el proceso de elevar al cuadrado pueden introducirse raíces extrañas.

Deben decirle además, que los valores que no satisfacen la misma se denominan, como en las ecuaciones fraccionarias, soluciones o raíces extrañas.

Un ejemplo sencillo que puede utilizarse para ilustrar la introducción de raíces extrañas es:

$$\sqrt{x} + 2x = 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{x} = -2x$$

$$x = 4x^2 \quad (2)$$

$$4x^2 - x = 0$$

$$x\,(4x-1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

Puedes comprobar rápidamente que $x = \frac{1}{4}$ no es solución de la ecuación original (1), pero sí de la transformada (2)

Se puede ver que para transformar la ecuación (1) en la (2) se elevó al cuadrado en ambos miembros.

Cuando se tiene una ecuación, digamos: $x=a$ y se eleva al cuadrado en ambos miembros se obtiene otra: $x^2 = a^2$, luego $x^2 - a^2 = 0$, $(x+a)(x-a)=0$ que contiene las soluciones de $x=a$, $x=-a$ .

Seguidamente se debe analizar el Ejemplo 1 del Epígrafe 11 pues se presentan casos en que todos los valores de la variable encontrados satisfacen la ecuación, alguno lo satisface (hay raíces extrañas) o ninguno satisface la ecuación.

Para la ejercitación pueden utilizarse los ejercicios 1y 2 del Epígrafe 11. En particular en el ejercicio 2, incisos f), g),y h) se incluyen ecuaciones fraccionarias con radicales donde se combinan los procedimientos de ambos tipos de ecuaciones. En el caso de los incisos i) y j), se combinan con ecuaciones logarítmicas que deben resolverse por reflexiones lógicas utilizando la definición 1 del Epígrafe 5.

Para las clases destinadas a la consolidación puede seleccionarse el ejercicio 8 del Capítulo 2 y ejercicios de las videoclases de la unidad 1 de onceno grado.

## 2.4. Sistemas de ecuaciones (10 h/c)

En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática

Conceptos | Relaciones | Procedimientos

Sistema de ecuaciones

sol

Solución de un sistema de ecuaciones

Interpretación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones

Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas

Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Resolver ejercicios con texto y problemas

Resolver sistemas cuadráticos

Esquema

**EL TRATAMIENTO DE ESTE CONTENIDO COMIENZA EN EL EPÍGRAFE 13 CON LA REACTIVACIÓN DE LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS, Y EN LOS EPÍGRAFES 14 Y 15 CON LOS SISTEMAS DE TRES CON TRES Y CUADRÁTICOS.**

La profundización que se hace de esta temática en este grado está en el tratamiento de los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas y los cuadráticos y la inclusión de ejercicios con texto y problemas que conducen a sistemas lineales y cuadráticos.

La condición previa fundamental para el estudio del procedimiento de los sistemas de tres con tres, es el procedimiento de solución de los de dos con dos. Aquí se tratarán tanto el método de sustitución como el de adición y sustracción. En ambos casos si se debe lograr que el alumno comprenda que la idea fundamental del procedimiento es (cualquiera sea el que se utilice), eliminar una de las dos variables y reducir el sistema a una ecuación lineal en una sola variable.

En el análisis de los distintos incisos del Ejemplo 1 del Epígrafe 13, a partir del conocimiento de que cada ecuación en dos variables representa una recta, el profesor tiene la oportunidad de ilustrar gráficamente lo que significa en un sistema tener:

- Una sola solución (dos rectas que se cortan en un único punto)
- Ninguna solución (dos rectas paralelas no coincidentes)
- Infinitas soluciones (dos rectas coincidentes)

En el último caso debe precisarse cómo se escribe el conjunto solución destacando que una variable toma todos los valores reales y la otra, depende de los valores que esta tome.

Incisos seleccionados del ejercicio 1 del Epígrafe 13 pueden proponerse a los alumnos para activar sus habilidades; en cada caso debe discutirse la vía de solución más racional, aunque no se debe obligar a los alumnos a seguir un determinado procedimiento, estando naturalmente el profesor en la obligación de indicar las vías más racionales, como por ejemplo, en los incisos ñ), o), y p) del ejercicio 1 donde lo más indicado es hacer un cambio de variable.

<u>En esta primera parte debe dedicarse mayor número de clases al tratamiento de los problemas</u> que conduzcan a sistemas de ecuaciones ya que este contenido no es nuevo para ellos; es útil insistir en la necesidad de analizar bien el texto, así como lo que se pregunta, además de exigir que declaren previamente las variables. Para la selección de los problemas el profesor puede apoyarse en los del Epígrafe 13 y en los del Epígrafe 3.3 del M.E.M.

En el tratamiento de los sistemas de tres ecuaciones con tres variables se debe ilustrar que la idea fundamental es reducirlo a uno de dos con dos y resolver este último. Para ello en el libro de texto se ejemplifica solo el método de adición y sustracción aunque el de sustitución también puede ser utilizado.

Para la ejercitación se puede seleccionar el ejercicio 1 del Epígrafe 14, los del ejercicio 2, pueden proponerse a los más aventajados destacando de nuevo, en los incisos del c) al e) la conveniencia de hacer un cambio de variable. Todos los problemas del epígrafe 14, excepto los del 12 al 14 que pueden proponerse a los más aventajados; además proponer una selección de los ejercicios y problemas del epígrafe 3.3.2 del M.E.M.

En el tratamiento de los sistemas cuadráticos, lo fundamental que debe lograrse en estas clases es la comprensión del procedimiento de solución por parte de los alumnos y que vean su analogía con los sistemas lineales (en cuanto al procedimiento) y sus diferencias pues en este caso obtienen una ecuación cuadrática y no lineal.

En este caso debe también trabajarse mediante ejemplos que ilustren cómo se procede y en especial destacar cuándo estos sistemas tienen dos, una o ninguna solución y la relación que ello tiene con el discriminante de la ecuación cuadrática que resulta.

Los ejercicios del Epígrafe 15 son todos adecuados para fijar el procedimiento de solución.

Es importante destacar que los ejercicios del Capítulo 1 del libro de texto, así como, una selección de ejercicios de los Capítulos 2.5 y 3.4 del M.E.M. pueden ser propuestos en clases de consolidación o irlos intercalando en la medida que se van tratando los contenidos correspondientes.

**UNIDAD 3.** las Funciones modulares/ Las funciones potenciales y sus inversas (30 H/C)

**INTRODUCCIÓN**

Esta unidad da continuación al trabajo con funciones, cuyo concepto se comienza a formarse desde los primeros grados y que se introduce de manera explicita en la Educación Media Básica con el estudio de las funciones lineales y cuadráticas. En el 10mo grado esta unidad tiene el propósito de profundizar y sistematizar este concepto, a la vez que se introducen nuevas propiedades y otros tipos de funciones.

Los conocimientos que son tratados en esta unidad tienen como antecedentes, en la Secundaria Básica, el estudio del concepto función como una correspondencia entre dos conjuntos y el tratamiento de las funciones lineales y cuadráticas. Previo al estudio de la función lineal, en la Enseñanza Primaria, se define proporcionalidad directa y se expresa mediante una función lineal definida en cierto conjunto que tiene como ecuación $y = kx$ ($k$ es un número real distinto de cero).De igual forma se define la función de proporcionalidad inversa.

En los programas de Matemática 10mo grado, vigentes hasta el curso 2012-2013, solo se trataban los contenidos correspondientes a las funciones lineales y cuadráticas, para las cuales se grabaron 16 teleclases (75-92). Este nuevo programa incorpora otras funciones que se trabajaban en 11no grado: La función modular y las funciones potenciales y sus inversas, con especial énfasis en las definidas en un subconjunto de IR por medio de $y = x^{-1}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ y $y = \sqrt[3]{x}$ o que se obtienen de estas al modificar la gráfica que las representa mediante una traslación en la dirección de los ejes de coordenadas o mediante una dilatación, contracción, o reflexión respecto al eje de las abscisas.

**Objetivos de la unidad**

Los estudiantes deben ser capaces de:

- Describir mediante gráficos o ecuaciones funcionales el comportamiento de situaciones de la realidad que se modelan mediante funciones lineales, modulares, cuadráticas y potenciales, aplicando sus propiedades.
- Interpretar informaciones sobre situaciones de la realidad que se modelan mediante funciones lineales, cuadráticas, modulares y potenciales dados sus gráficos, sus ecuaciones o sus propiedades.
- Interpretar las propiedades de las funciones – y en particular de las funciones lineales, modulares, cuadráticas y potenciales – a partir de su representación algebraica y geométrica.
- Elaborar conjeturas, fundamentar y demostrar relaciones, propiedades y regularidades de funciones lineales, modulares, cuadráticas y potenciales, aprovechando las ventajas que ofrecen asistentes matemáticos como el GeoGebra.

Formular y resolver problemas de la vida práctica de carácter político ideológico, económico- social y científico - ambiental, que se modelen mediante funciones lineales, modulares, cuadráticas y potenciales, sobre la base del dominio del concepto función (como una correspondencia entre dos conjuntos o como un conjunto de pares ordenados) y de poder transferir de una forma de representación a otra de estas funciones según las demandas de la situación planteada.

Lo esencial a lograr en esta unidad es la sistematización y profundización del concepto función mediante el estudio de las funciones lineales y cuadráticas (que los alumnos estudiaron en la Secundaria Básica), la función modular y algunos ejemplos de funciones potenciales, que se introducen en este grado. Esto se manifiesta en el reconocimiento de la propiedades de las funciones en diferentes representaciones; en la interpretación de estas desde diferentes áreas de la matemática, otras disciplinas y en situaciones donde tienen sentido, en la fundamentación y demostración de propiedades y relaciones relativas a ellas y en la resolución de ejercicios y problemas intramatemáticos y extramatemáticos en los cuales se requieren de los conocimientos sobre las funciones estudiadas.

Para lograr lo anterior es necesario que los alumnos puedan:

- Traducir del lenguaje común al algebraico y viceversa situaciones de la vida cotidiana.

- Calcular valores funcionales a partir de la ecuación de la función y hallar pares ordenados que pertenecen a una función, desde diferentes formas de representación.
- Representar gráficamente y reconocer las propiedades de funciones lineales, modulares, cuadráticas y potenciales, fundamentalmente para n=–1,2 y 3 y sus inversas en cualquiera de sus formas de representación.
- Esbozar el gráfico y reconocer las propiedades de una función definida en cierto conjunto por medio de una ecuación de la forma $y = af(x + d) + e$ ($a, d, e \in R : a \neq 0$) a partir del gráfico de $f$.
- Plantear ejemplos de aplicaciones de las funciones a situaciones de la vida práctica y otras ciencias, sobre la base de comprender el significado que tienen las propiedades de las funciones estudiadas en diferentes situaciones en que estas tienen sentido (algebraica, geométrica, física, economía, etc.).
- Elaborar conjeturas, fundamentar y demostrar relaciones, propiedades y regularidades de las funciones estudiadas, aprovechando las propiedades de los asistentes matemáticos.
- Formular y resolver ejercicios y problemas donde es necesario aplicar las funciones estudiadas en sus diversas formas de representación y sus propiedades, en particular, problemas de optimización.
- Reconocer la existencia o no de función inversa y determinar la ecuación correspondiente, gráfico y propiedades.
- Construir funciones que satisfacen determinadas condiciones.
- Determinar términos próximos y lejanos y la ley de formación de una sucesión numérica.

**Estructura interna de la unidad 3**

Concepto de función

- Función como una correspondencia entre dos conjuntos
- Función como un conjunto de pares ordenados

Funciones lineal, cuadrática y modular

- Función lineal ( $y = mx + n$ )
- Función cuadrática ( $y = ax^2 + bx + c$ )
- Función modular ( $y = |x|$ )

Problemas sencillos de optimización

Funciones potenciales y sus inversas

- Función potencial cuadrática ( $y = x^2$ )
- Función potencial cúbica ( $y = x^3$ )
- Función de proporcionalidad inversa ( $y = \frac{1}{x}$ ).
- Generalización de las propiedades de las funciones potenciales

- Definición de función inversa
- Función raíz cuadrada ( $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ).
- Función raíz cúbica ( $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ ).

Esquema

De esta estructura se derivan las siguientes unidades temáticas.

- Repaso y profundización. La función modular.
- Funciones potenciales y sus inversas.

| Sub-unidad | Contenidos | h/c |
|---|---|---|
| 3.1. | Repaso y profundización. La función modular. Definición de función como una correspondencia entre conjuntos y como un conjunto de pares ordenados de números reales. Análisis de | 17 |

| | | |
|---|---|---|
| | correspondencias dadas en distintas formas para decidir si son o no funciones de un conjunto A en otro B. Dominio de definición y conjunto imagen de una función. Distintas formas de representar una función. Función numérica. Función lineal como ejemplo de función numérica: ecuación, variable independiente (o pre imagen), variable dependiente (o imagen), casos particulares (función constante, de proporcionalidad directa e idéntica), representación gráfica, dominio, conjunto imagen, cero, signo y monotonía.<br>El concepto de función cuadrática. Representación gráfica, dominio, imagen, ceros, monotonía, signos y paridad. Dilatación y contracción de la gráfica de f: IR$\rightarrow$IR con y= f(x) = $x^2$. Reflexión respecto al eje x. Traslación de una parábola en la dirección de los ejes coordenados. Deducción de la fórmula para calcular la abscisa del vértice de la parábola que representa gráficamente la función cuadrática. Ejercicios y problemas sencillos de optimización. Representación gráfica de datos sobre fenómenos naturales y sociales utilizando el concepto de función cuadrática.<br>Definición de función par. Análisis de las funciones de la forma $y = ax^2 + c$ (x$\in$IR, a,c $\in$ IR ; $a \neq 0$) como funciones pares.<br>Definición de módulo o valor absoluto de un número real. Definición de la función modular como una correspondencia entre conjuntos y como un conjunto de pares ordenados de números reales, de la forma $(x;\|x\|)$. Distintas formas de escribir la ecuación funcional.<br>Representación gráfica de funciones modulares definidas en diferentes dominios. Dominio de definición, imagen, ceros, signos, monotonía, extremos, simetría del gráfico. Analizar las propiedades de funciones dadas por medio de ecuaciones de la forma $y = a\|x - b\| + c$ (a, b, c $\in$ IR ; $a \neq 0$), variando su dominio. | |

| | | |
|---|---|---|
| 3.2 | Funciones potenciales y sus inversas<br>Concepto de función potencial. Funciones potenciales ya estudiadas.<br>Funciones potenciales representadas por una ecuación de la forma $y = x^3$. Representación gráfica. Dominio de definición, conjunto imagen, ceros, signos, monotonía, extremos, simetría del gráfico.<br>Definición de función impar. Analizar las funciones dadas por una ecuación de la forma $y = ax^3 + c$ ( x∈IR, $a, c \in R$ ; $a \neq 0$) como funciones impares.<br>Funciones potenciales representadas por una ecuación de la forma $y = x^{-1}$ .Representación gráfica. Dominio de definición, conjunto imagen, signos, monotonía, extremos, simetría del gráfico, paridad.<br>Generalización de las propiedades de las funciones potenciales para n positivo par, n positivo impar, n negativo par, y n negativo impar.<br>Definición de función inyectiva. Ejemplos.<br>Definición de función inversa.<br>Funciones inversas de las funciones potenciales.<br>Las funciones reales representadas por ecuaciones de la forma $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($n$ es un número entero tal que $n \geq 2$). Esbozo del gráfico.<br>Análisis de las funciones de ecuaciones $y = x^{\frac{1}{2}}$ $(x \in IR : x \geq 0)$ e $y = x^{\frac{1}{3}}$ $(x \in IR)$ como las funciones inversas de $y = x^2$ $(x \in IR : x \geq 0)$ y $y = x^3 (x \in IR)$, respectivamente. Representación gráfica de estas funciones. Dominio de definición, conjunto imagen, ceros, signos, monotonía, simetría del gráfico. Simetría de los gráficos de dos funciones inversas respecto a la recta $y = x$.<br>Análisis de la función $y = x^{\frac{1}{2}} (x \in IR : x \geq 0)$ como una función inyectiva que no es par ni impar y $y = x^{\frac{1}{3}} (x \in IR)$ como una función inyectiva impar. | 13 |

**Bibliografía básica para el desarrollo de la unidad**

- Libro de texto de Matemática de Décimo grado. Capitulo 2, epígrafes 12-15, páginas 123-144.
- Manual de ejercicios de matemática para la Educación Media Superior. capítulo 2, páginas 106-192.
- Teleclases 75-92. Matemática 10mo grado. 2004-2005.

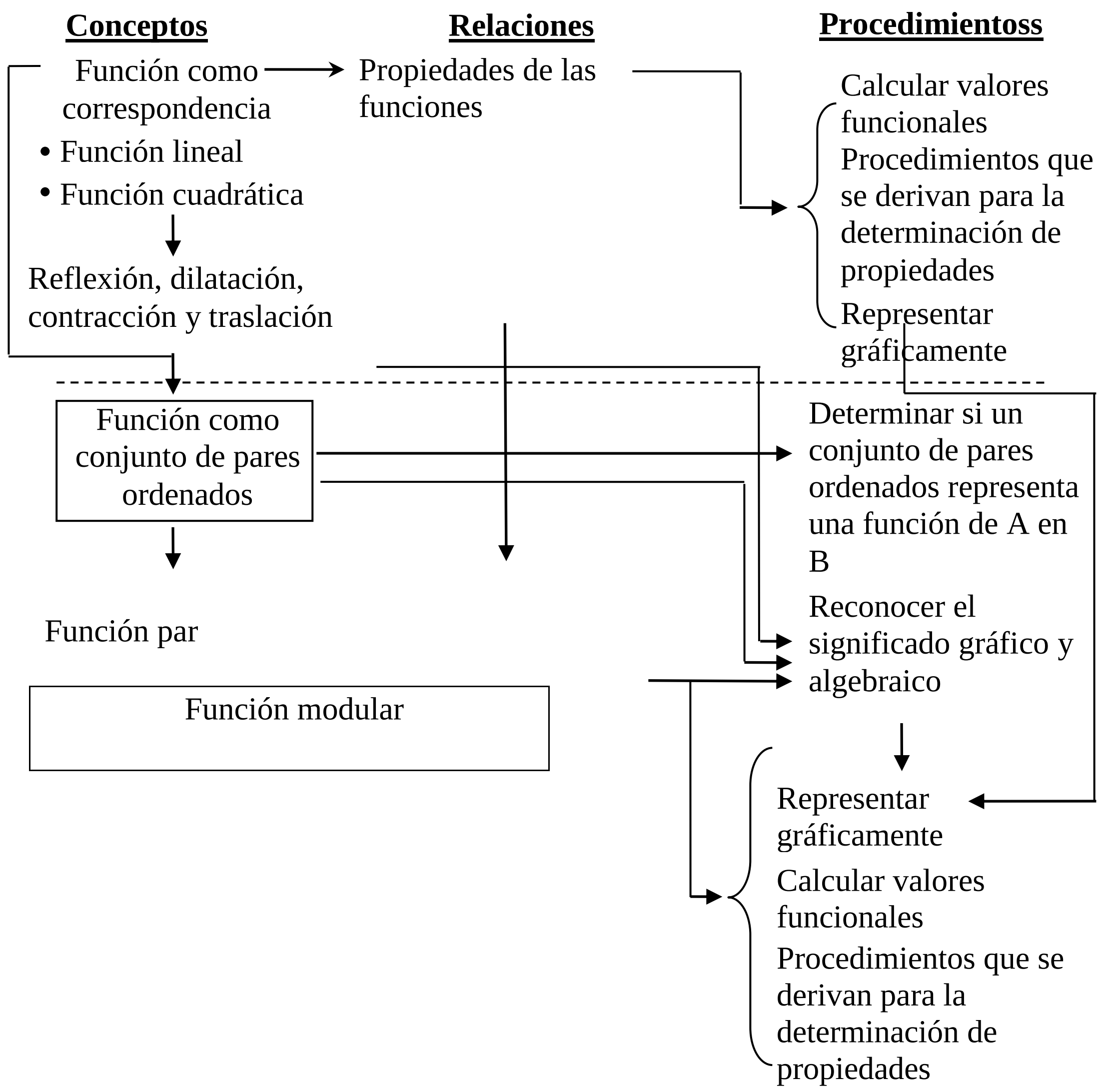
**Indicaciones y orientaciones metodológicas para el desarrollo de las unidades temáticas**

**Repaso y profundización. La función modular. (17 h/c)**

Lo esencial en esta unidad temática radica en la sistematización y profundización del concepto función, a partir de su definición como una correspondencia entre dos conjuntos y como conjunto de pares ordenados, que para estar determinada requiere que se conozca su dominio de definición, conjunto imagen y ley de formación. A partir de estas funciones se deben formalizar las propiedades generales de las funciones y cómo se manifiestan en las funciones particulares estudiadas: cero, signo, monotonía, valor máximoy/o mínimo, simetría del gráfico y paridad, inyectividad. Además de identificar estas propiedades en una función dada en diferentes representaciones es importante su interpretación algebraica, geométrica y en otras áreas y situaciones donde estas propiedades tienen sentido. Otro aspecto de vital importancia en esta unidad temática consiste en la realización de ejercicios y problemas (intramátemáticos y extramatemáticos) en los cuales se aplican las propiedades y la representación gráfica de estas funciones.

En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática resaltando en el recuadro los puntos esenciales de ésta.

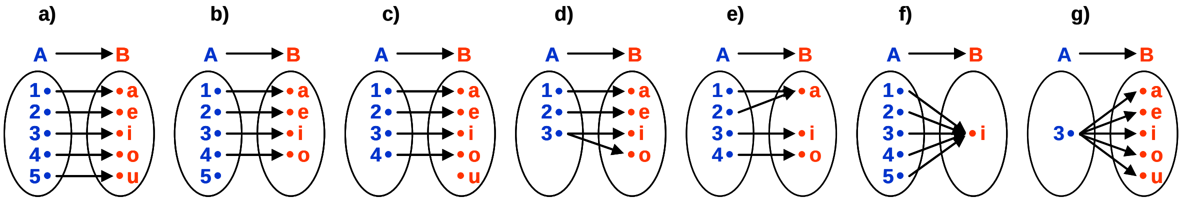
Función




Esquema

En primer lugar en esta unidad temática es necesario recordar concepto de función que los alumnos estudiaron en la Secundaria Básica: Una función f de A en B es una correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B.

Para lograr que los alumnos reactiven este concepto se deben presentar varias correspondencias para analizar si constituyen o no una función de A en B. Nótese que siempre se debe indicar el dominio A, el codominio B y la relación que asocia a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B. En este caso es necesario provocar la reflexión de los alumnos mediante ciertos cambios en una correspondencia: incorpora elementos en el conjunto A, incorporar elementos en el conjunto B, modifica la correspondencia, etc. En todas las situaciones que se generan con estos cambios se debe formular la siguiente pregunta: ¿Es la siguiente correspondencia una función del conjunto A en el conjunto B?. El siguiente ejemplo puede ilustrar esta idea:[2]




Una vez que los estudiantes hayan comprendido el concepto de función como una correspondencia entre dos conjuntos se pueden presentar nuevas situaciones para analizar si son o no funciones de un conjunto A en otro B, por ejemplo:

a) La correspondencia de IN en IN en la que a cada número natural le asocia su mitad.
b) La correspondencia que a cada número real no nulo le asocia su reciproco en el conjunto de los números reales.
c) La correspondencia que a cada palabra del idioma español le asocia la cantidad de letras que la forma.
d) La correspondencia que a cada figura plana le asocia su perímetro.

De igual forma se deberán solicitar ejemplos a los alumnos de algunas de ellas que sean o no funciones.

Para introducir la definición del concepto de función como un conjunto de pares ordenados, se puede utilizar cualquiera de los ejemplos de funciones anteriores u otro similar, un ejemplo puede ser el siguiente:

En el siguiente diagrama a cada elemento del conjunto *A* se le asocia su mitad que pertenece al conjunto *B*.

a) Expresa esta correspondencia como un conjunto de pares ordenados $(x;y)$ en el cual $x \in A$ e $y \in B$.
b) ¿Es esta correspondencia una función?
c) ¿Cómo se puede verificar que un conjunto de pares ordenados es una función?

Se debe hacer comprender que la representación de una función mediante un conjunto de pares ordenados es muy práctica, sobre todo porque la podemos representar en un sistema de coordenadas rectangulares. Luego es de interés para la matemática definir el concepto función de la siguiente manera:[3]

Una función $f: X \to Y$ es un conjunto de pares ordenados $(x;y)$ tal que cada $x \in X$ aparece como la primera coordenada de solo un par ordenado.

Del análisis de la definición resulta que una función f de un conjunto A (dominio de f) en un conjunto B (codominio de f) se caracteriza por las propiedades siguientes:

1) Si $(x; y)\in f$, entonces $y\in B$ y $x\in A$.
2) Para cada $x\in A$ existe un $y\in B$ tal que $(x; y)\in f$.
3) El conjunto f no contiene dos pares diferentes con la misma primera componente, es decir, si $(x; y_1)\in f$ y $(x; y_2)\in f$, entonces $y_1=y_2$.

Debe tenerse en cuenta que para que una función esté determinada, debe indicarse su dominio, su codominio y el conjunto de pares ordenados. En los casos en que la relación entre los elementos de ambos conjuntos se expresa mediante una expresión analítica, es suficiente indicar el dominio.

[2] Ver la Teleclase # 75. Matemática 10mo grado. 2004-2005.
[3] Matemática. Décimo grado. Página 124.

Resulta evidente que la comprensión del concepto función no se reduce a la reproducción de su definición ni tampoco a la realización de una serie de procedimientos, digamos, para calcular el valor de una función para un argumento dado, para determinar sus ceros (si existen) o la monotonía de la función. Esta absolutización de su lado operacional puede conducir a que los estudiantes no comprendan que el objeto función ha sido construido de manera expresa para el estudio de los fenómenos sujetos a cambio y que en lugar de trabajar con variables, lo hagan con incógnitas.

Por eso es preferible que la formación de este concepto se realice a partir de un conjunto de problemas que involucren situaciones de correspondencia y de variación de carácter intra- y extramatemático, que posibiliten discriminar lo común que tienen aquellas que se pueden modelar a través del concepto función. A partir de estos ejemplos los alumnos deben comprender que el dominio de definición de una función que pertenece a una clase de funciones determinada no siempre es el conjunto de los números reales, por ejemplo, la función puede pertenecer a la clase de las funciones lineales y su dominio no ser el conjunto de los números reales.

Este tránsito de la situación particular que se está analizando a un objeto abstracto, como es el de función, acarrea no pocas dificultades a los estudiantes. En este sentido es recomendable que ellos realicen este proceso en sentido inverso, es decir, que a partir de una función dada puedan poner ejemplos de situaciones representativas que se modelan a través de esta.

Profundizando sobre este particular, se considera que en el concepto función hay tres aspectos esenciales a tener en cuenta: uno es el de correspondencia, otro es el de covariación (variación conjunta de los argumentos y los valores de la función) y el tercero, es su carácter de objeto matemático con el cual se opera y se establecen relaciones.

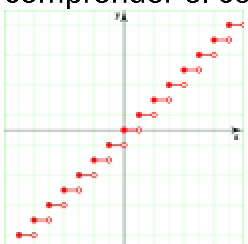
Este aspecto de la covariación no se toma en consideración en muchas ocasiones. Por ejemplo, no siempre se aprovecha en el desarrollo de un pensamiento proporcional en los niños, de modo que en situaciones de proporcionalidad comprendan que a un múltiplo dado de una cantidad de magnitud corresponde el mismo múltiplo de la otra cantidad de magnitud, que a la suma de las cantidades de una magnitud corresponde la suma de las cantidades correspondientes de la otra, y que a diferencias iguales de una cantidad de magnitud corresponden diferencias iguales de la otra. De este modo los alumnos deben poder poner ejemplos de funciones $f_i$: $R \rightarrow R$ (i=1,2,3), para las que se cumpla para todo x, y de su dominio y números reales $\alpha$ y $\beta$ cualesquiera :

a) $f_2(\alpha x)= \alpha f_2(x)$
b) $f_1(x + y)= f_1(x)+ f_1(y)$
c) $f_3(x) – f_3(y)= k (x – y)$

Es preciso tener en cuenta, además, que los estudiantes se enfrentan en el proceso de elaboración del concepto función a los mismos obstáculos que se presentaron a lo largo de su evolución. Es conocido que el concepto función se concibió sucesivamente como variación, proporción, gráfica, curva o ecuación hasta llegar a su definición actual (Ruiz Higueras, 1998). Por eso no es de extrañar que muchos estudiantes consideren que una función es una curva, específicamente la trayectoria de puntos en movimiento, o una ecuación.

La valoración de los hitos en el desarrollo histórico del concepto función, vinculados a las condiciones socioeconómicas y culturales de cada momento, las dificultades que se debieron superar, las personalidades que hicieron posibles los avances, y los ulteriores desarrollos, son aspectos a valorar en las clases y en el estudio individual por los estudiantes, para favorecer los aspectos formativos y lograr que los estudiantes se percaten que muchos obstáculos que presentan en su aprendizaje se corresponden con los que se manifestaron en el desarrollo de los contenidos matemáticos.

Expresiones como “dada la función y=f(x)…” o “dada la curva y=f(x)…” se introducen en el lenguaje y de este modo se transforman en metáforas que inducen a pensar que una función es o bien una ecuación o bien una curva. Por eso, además de cuidar el lenguaje que se utiliza, se debe evitar trabajar exclusivamente con funciones que se pueden describir a través de una expresión analítica, y cuyo gráfico es una curva continua, salvo en un conjunto finito de puntos, pues esto contribuye a la concepción arriba señalada. Poner ejemplos de funciones no elementales como la siguiente, que tiene un conjunto numerable de discontinuidades, resulta imprescindible para comprender el concepto función.



Esto explica también por qué los estudiantes no reconozcan a veces que un conjunto discreto de puntos en un sistema de coordenadas cartesiano puede representar una función, o que una sucesión es una función. El trabajo con tablas para obtener algunos puntos que ayuden a esbozar mejor el gráfico de una función, cuyo dominio de definición es un subconjunto de números reales, conduce en ocasiones a la idea de que los puntos representados siempre se tienen que unir a través de una línea continua.

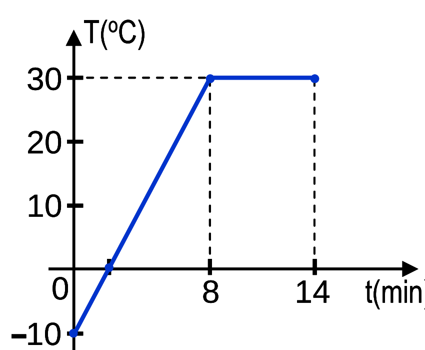
En la escuela se asume que el dominio de una función lineal o una cuadrática es IR salvo que se especifique que su dominio es un subconjunto de este. En general, se adopta el convenio de que cuando una función numérica f se define mediante una ecuación, su dominio es el subconjunto “más amplio” de IR en el cual ella tiene sentido. Ahora, si este convenio se asume en la casi generalidad de las tareas, esto puede conducir a la idea de que para que una función esté determinada, es suficiente indicar la expresión analítica que la describe. Por eso es necesario trabajar con funciones cuyo dominio de definición sea un subconjunto de aquel donde no hay problemas para calcular los valores de la función, o con funciones definidas por ramas o a trozos.

Es conveniente escribir y = f(x)=…., para que queda claro que x es la variable independiente, mientras que y, es la dependiente, y así con cualesquiera letras que se tomen como variables dependiente e independiente.

El tratamiento de las funciones lineales en el 10mo grado debe revelar la enorme importancia que estas tienen en la modelación de una amplia variedad de procesos y fenómenos de la realidad objetiva. Este trabajo debe desarrollarse dando continuidad al iniciado en la Secundaria Básica, donde se trata el concepto de función como una correspondencia entre dos conjuntos y como una relación entre dos magnitudes, tal es el caso del siguiente ejemplo:

El gráfico describe el comportamiento de la temperatura “T” de una mezcla en función del tiempo “t”.

a) ¿Cuál fue la temperatura inicial de la mezcla?



b) ¿Cuál era su temperatura de la mezcla a los 8 minutos, de haberse iniciado la medición?

c) ¿Durante cuántos minutos estuvo la temperatura de la mezcla ascendiendo?

d) ¿A los cuántos minutos alcanzó los $0^{o}C$ ?

e) ¿Qué temperatura tenía la mezcla a los 10 min y 30 s, de haberse iniciado la medición?

La creencia que adquieren algunos estudiantes de identificar la función lineal con su ecuación, los aleja de los conceptos de función y de ecuación, a la vez que crea una confusión en la interpretación de sus definiciones. Esta situación se podría resolver si en las clases se realizan razonamientos heurísticos como los siguientes:

1º) $y = 2x + 1$es una ecuación lineal en dos variables reales, cuyo dominio básico de solución es IR.

2º) Sus soluciones son pares ordenados de números reales, por tanto el conjunto solución está compuesto por infinitos pares $(x;y)$de números reales.

3º) En cada uno de estos pares, para cada valor de la variable independiente "$x$" existe un único valor de "$y$", es decir, se trata de un conjunto infinito de pares ordenados de números reales, en los cuales no se repite la primera componente.

4º) Por tanto, el conjunto solución de la ecuación $y = 2x + 1$ constituye una función lineal cuyo dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

De esta manera, el estudiante puede comprender que el conjunto solución de una ecuación de la forma $y = mx + n \quad (x \in R)$es un conjunto infinito de pares ordenados $(x;y)$ que constituye una función. Esta idea se debe interpretar geométricamente en un sistema de coordenadas rectangulares, lo cual se puede desarrollar un análisis basado en preguntas como las siguientes:

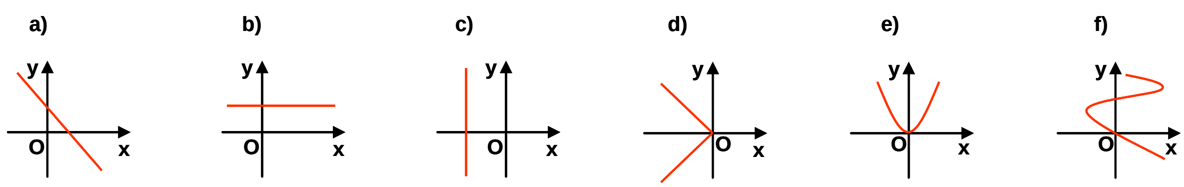
¿Qué tipo de gráfico corresponde a una función lineal?, ¿Cuál es la posición, en relación con los ejes de coordenadas?

¿Es función el conjunto de puntos situados sobre una recta perpendicular al eje de las abscisas?

¿Qué característica debe tener un gráfico, representado en un sistema de coordenadas rectangulares, para que el conjunto de pares ordenados que lo forman sea una función?

El siguiente ejercicio se puede ayudar a responder interrogantes como las anteriores, y con esto propiciar la comprensión del concepto de función como un conjunto de pares ordenados:

Determina cuáles de las representaciones gráficas siguientes corresponde a una función:[4]




El tratamiento de las funciones lineales debe permitir formalizar e interpretar algunas propiedades generales de las funciones (dominio de definición, imagen, cero, signo y monotonía), resolver ejercicios en que la función esté definida en intervalos o conjuntos numerables o discretos de puntos, relacionar, mediante las propiedades, el

[4] Ver la Teleclase # 76. Matemática 10mo grado. 2004-2005.

grafico de una función con sus ecuaciones y dominio correspondientes y viceversa.

Otras tareas deben proporcionarles también a los estudiantes la oportunidad de reconocer las ventajas y desventajas que puede tener trabajar con una u otra forma de representación de las funciones. En la tarea siguiente, los estudiantes deben interiorizar la conveniencia de pasar a una representación algebraica para cumplir los requerimientos de la tarea en los incisos d), e) y f).En el gráfico siguiente se ha representado gráficamente el movimiento de tres móviles A, B, C y D, observándose en particular que los móviles B y D tienen trayectorias paralelas.

a) Caracterice el movimiento de los móviles A, B C y D.

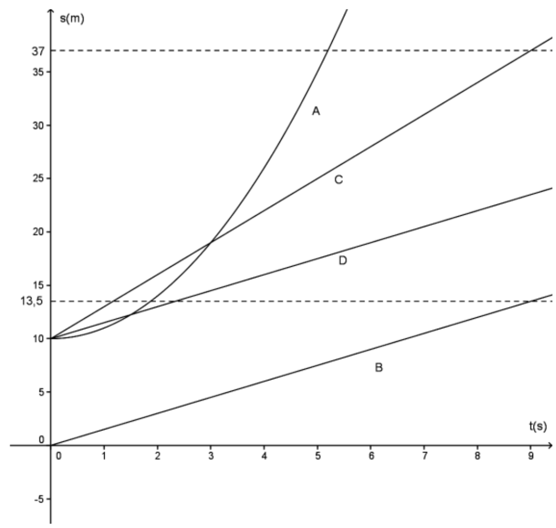
b) Compare los móviles (B y D) y (C y D) en relación con su velocidad.

c) ¿A qué distancia se encuentran los móviles B y D en el momento de salida?

d) ¿Al cabo de cuánto tiempo se encuentran los móviles A y C?

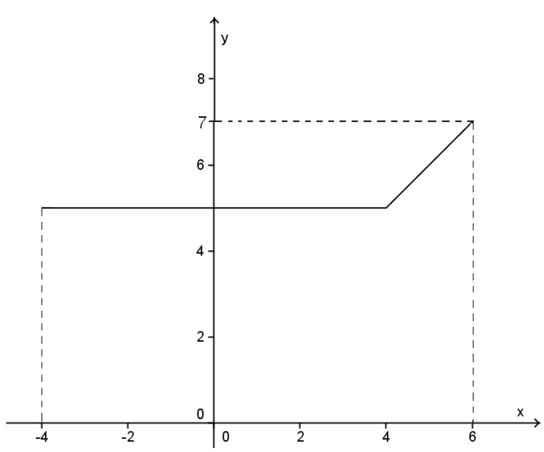
e) A los 9 s el móvil B ha recorrido 13,5 m. ¿Qué distancia ha recorrido en ese mismo tiempo el móvil D?

f) ¿Cuál es la velocidad del móvil C? ¿Qué distancia han recorrido A y C al momento de su encuentro?

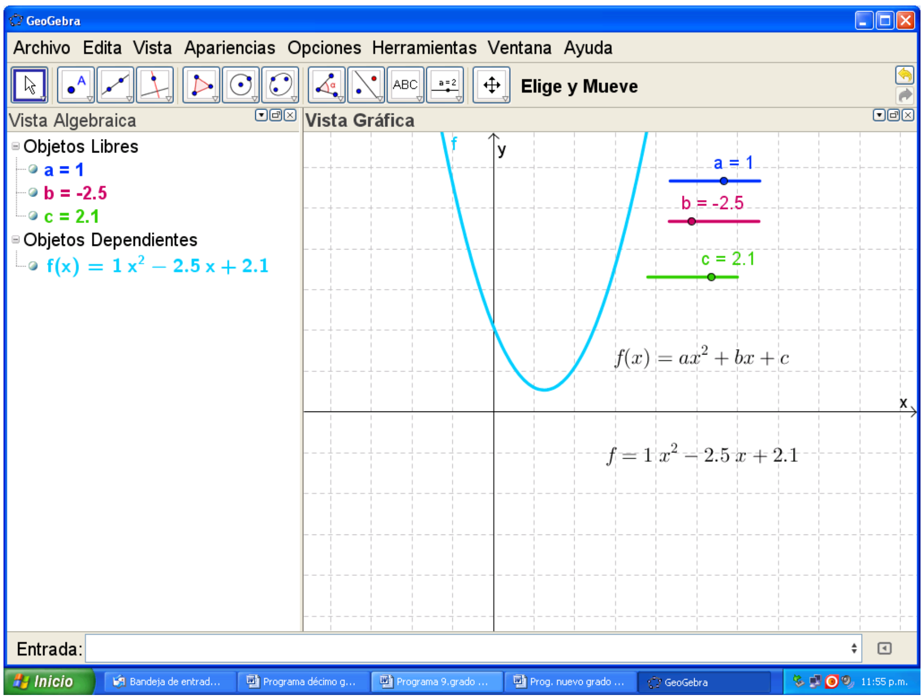



Es sabido que para los estudiantes es más fácil determinar, a partir de la ecuación correspondiente a una función, sus propiedades y su gráfico, que de manera inversa, quizás porque es lo que más ejercitan. Se requiere entonces que los estudiantes desarrollen otras tareas, por ejemplo, que construyan funciones que poseen determinadas propiedades, o que determinen los parámetros de la ecuación de ciertas funciones que pertenecen a una clase de funciones dada, a partir de sus gráficos, como es el caso en la tarea siguiente.

Determine la función a la que le puede corresponder el gráfico siguiente:

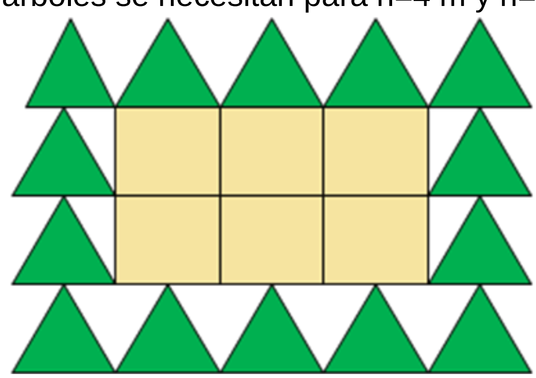


Las dificultades que se presentan en el trabajo con funciones se agudizan cuando hay incongruencia entre las representaciones de partida y la de llegada. Esto se manifiesta, por ejemplo, al trasladar el gráfico que representa una función definida en un subconjunto de R por una expresión analítica, en la dirección del eje de las abscisas, por cuanto mover el gráfico de la función c unidades hacia la derecha (la izquierda) tiene en el registro algebraico el efecto de que el argumento de la función disminuye (aumenta) en c unidades. De modo que resulta importante realizar tareas donde -con ayuda de los asistentes matemáticos- los estudiantes comprendan cómo la variación de los parámetros de la ecuación correspondiente a una función afecta el gráfico de esta, y viceversa, como una modificación de su gráfico tiene un efecto en los valores de los parámetros de la ecuación.




Además resulta necesario analizar casos límite y especiales y relacionar los conceptos con otros ya estudiados. Los estudiantes deben tener un repertorio de situaciones de la realidad donde tiene sentido la aplicación del concepto dado, las cuales deben poder evocar ante una situación problemática determinada.

En una finca se quiere plantar una cortina rompevientos alrededor de un campo rectangular de dimensiones n x n-1 (en m), tal como se muestra en la figura para n = 3 (1 árbol x $m^2$). ¿Cuántos árboles se necesitan para n=4 m y n=10 000 m?



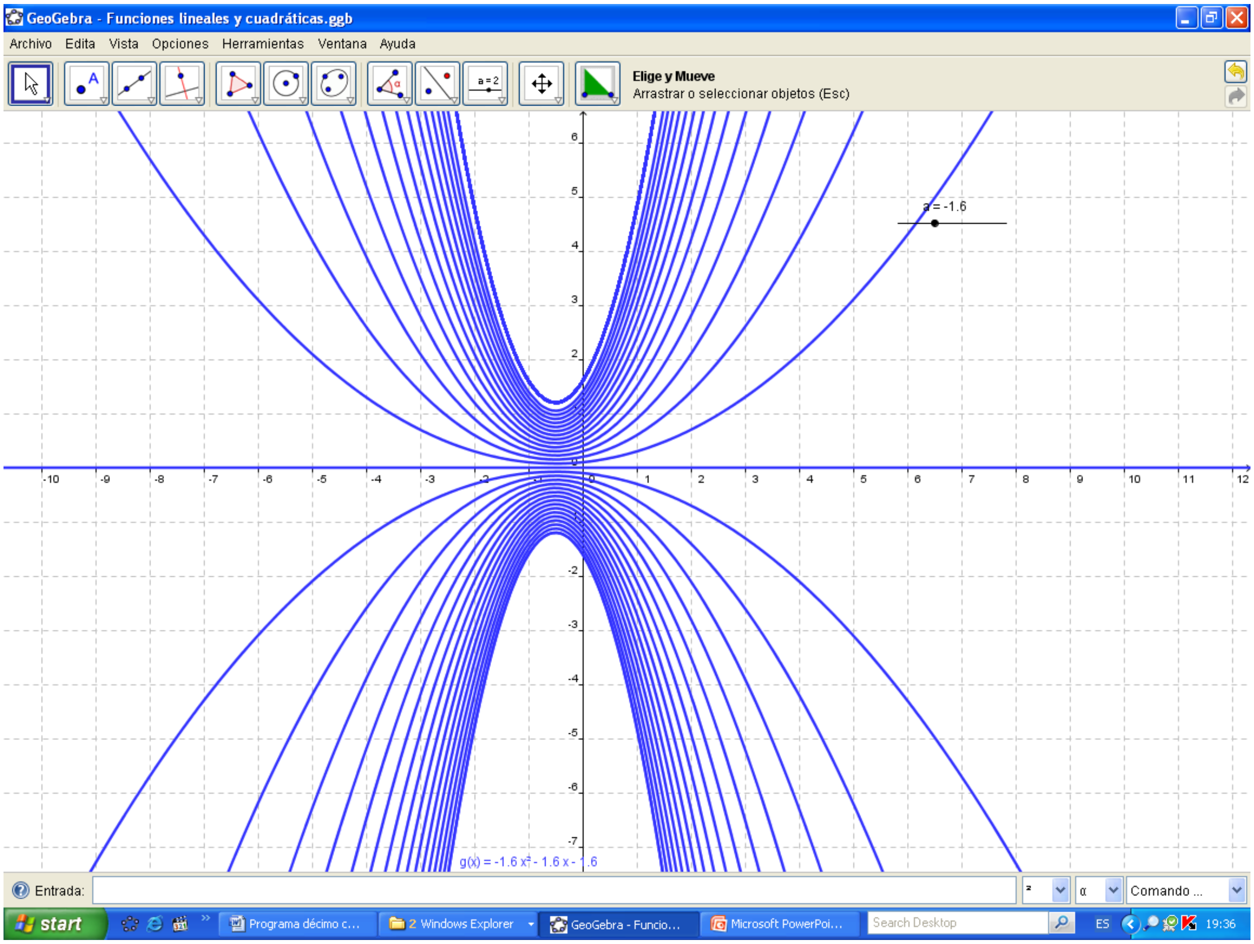
La utilización de los asistentes matemáticos puede ayudar a redescubrir nuevas propiedades y relaciones. Por ejemplo:

Con ayuda del asistente matemático GeoGebra investiga:

a) El comportamiento de las funciones definidas por medio de $f(x)=ax+a$ y $g(x)=ax^2+ax+a$ para todo $x \in R$. (Sugerencia: activa el rastro de cada una de estas funciones antes de mover el deslizador a)

b) La trayectoria que describe el vértice de la parábola correspondiente a la función definida a través de $f(x) = ax^2+bx+c$ para todo $x \in R$, al variar b.
(Sugerencia: Crea el vértice por medio de Extremo[f], activa su rastro y desplaza b)

Así, por ejemplo, como resultado de a) el alumno obtiene un haz de parábolas, como se muestra a continuación:




Además pueden elaborar conjeturas acerca de cuáles propiedades de las funciones elementales se mantienen invariantes o no, al modificar los parámetros de su ecuación o efectuar determinadas operaciones con ellas.

Por tanto, teniendo como punto de mira los objetivos a lograr a corto, mediano y más largo plazo, el sistema de tareas debe poner al descubierto las ideas y experiencias previas de los estudiantes. El profesor debe determinar a partir del diagnóstico cuáles son los obstáculos, concepciones, metáforas o creencias de las cuales pueden haberse apropiado los estudiantes. Por ejemplo, debe proponer tareas que permitan revelar si los estudiantes confunden el concepto de monotonía con el de signo de una función, o el gráfico de la función que modela una situación, con la figura que la ilustra, como es el caso, cuando se identifica el gráfico de la distancia recorrida por un móvil -en función del tiempo- con la trayectoria efectuada por este.

Función modular

Para introducir  la función modular se puede partir de un problema como el siguiente:

**Un mensajero parte de un punto hacia un campamento distante "a" metros e inmediatamente regresa al lugar de origen.**

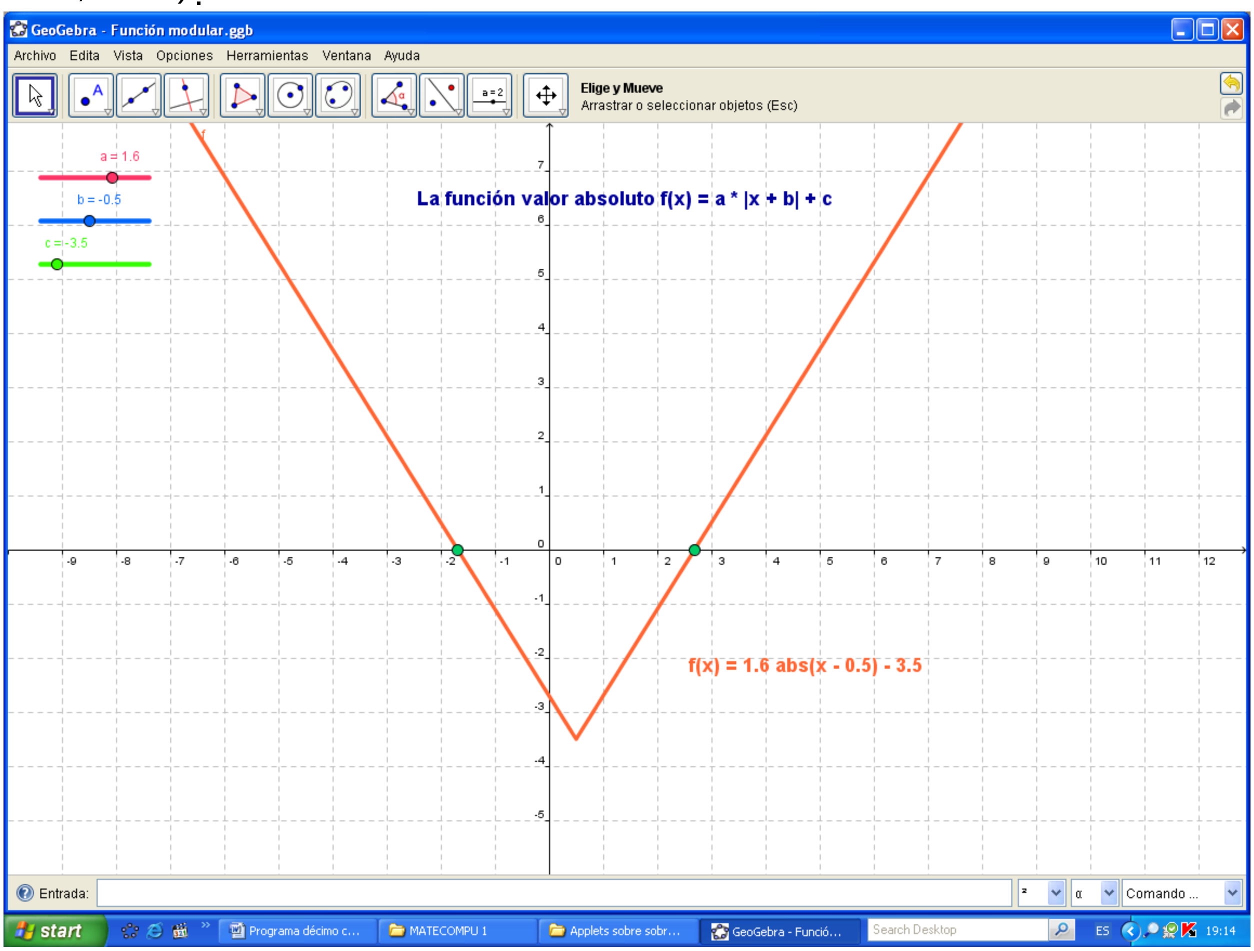
Analizar si la situación anterior, tomando como variable independiente el tiempo que demora y como dependiente, el espacio recorrido, es una función.

Realizar una representación gráfica de la situación, observando que el dominio de definición de la función es un subconjunto de IR.

Relacionar las propiedades con el gráfico de la función.

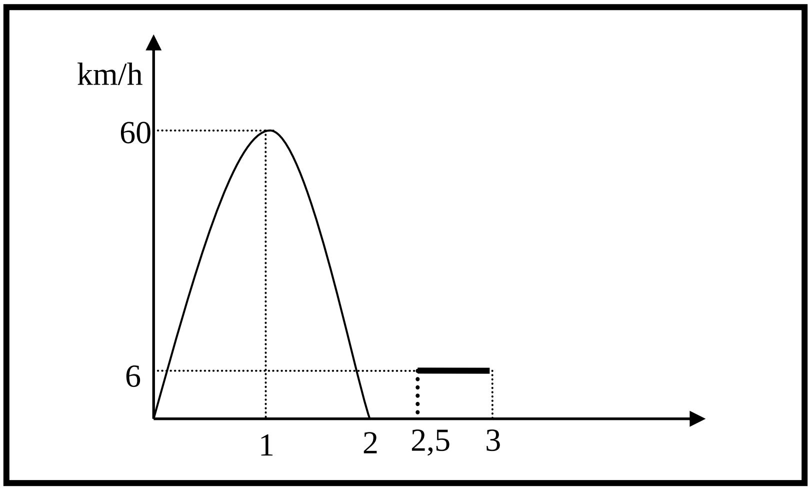
Ampliar la situación anterior a conjunto de pares ordenados (x, y), tales que y = $|x - a|$, analizando el caso particular en que a=0.

Valorar de igual forma la relación entre la representación gráfica y analítica de las funciones dadas por medio de ecuaciones de la forma $y = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in R$; $a \neq 0$; $x \in IR$).



En correspondencia con el enfoque metodológico de la asignatura y lo expresado anteriormente sobre el concepto de función, los ejercicios para la fijación, sistematización y profundización pueden ser como los siguientes:

1. Un grupo de estudiantes destacados hicieron el recorrido para ascender al pico Turquino. La gráfica muestra la velocidad que ha llevado la columna durante el recorrido realizado en dos puntos del trayecto en que demoraron 3 h.




a) Interprete el gráfico siguiente. Analice si se detuvieron en algún momento.

b) De acuerdo con el gráfico, escriba la ecuación que corresponde a la función cuadrática representada.

En este ejercicio se adiestra a los alumnos en el concepto de función como conjunto de pares ordenados y en determinar la ecuación de esta en correspondencia con las propiedades de la función representada.

Destacar en este ejercicio la importancia de ascender el pico Turquino, la provincia en qué se encuentra enclavada y lo que representa para la historia de Cuba.

Se deben realizar ejercicios donde tengan que representar funciones y puedan analizar su comportamiento al variar un parámetro haciendo uso de asistentes matemáticos.

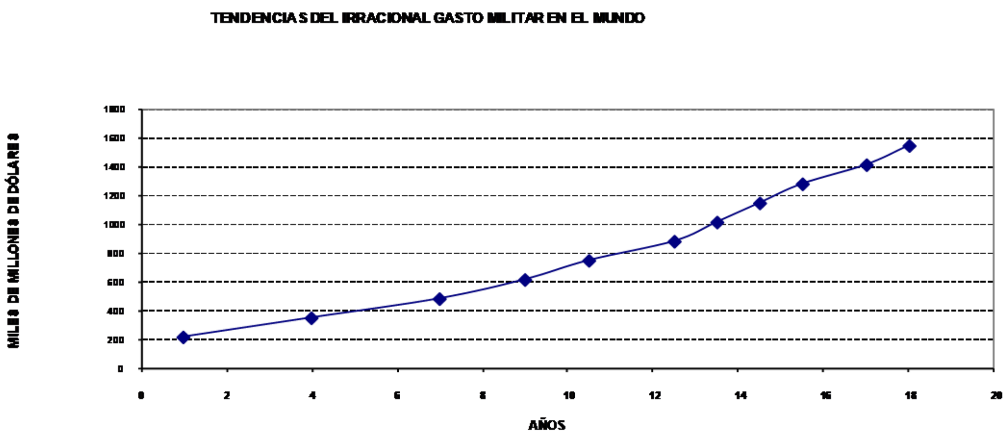
2. Las ecuaciones de la forma $y = |x - 2| + p$ ($x \in IR$) representan una familia de funciones modulares.

a) Interprete el comportamiento de las funciones para $p \in IN$. Utilice para ello el asistente matemático.

b) Represente la función para cuando $p = 0$ en el intervalo $[-1; 4)$ y escriba sus propiedades**.**

En este ejercicio se analiza el comportamiento de la función a partir de los valores de "p" y es un ejemplo del trabajo con funciones donde su dominio es un subconjunto de los números reales.

2. A continuación se presenta una gráfica con la tendencia del gasto militar en el mundo. Estos datos fueron tomados del informe a la VII Cumbre de los Países No Alineados celebrada en Cuba en septiembre de 1979.




a) Valore el comportamiento de los datos.

b) La estimación de los datos se realizó sobre la base de una función cuadrática de la forma y $=ax^2+bx+c$. Determine una ecuación aproximada de ella, indicando además su dominio de definición.

c) A partir de que el primer dato fue tomado en el año 1973 con un gasto de 219,6 miles de millones de dólares, determine el gasto que se estima para el año 2015 si se mantiene esta tendencia, a sabiendas que el gasto militar ha superado esta tendencia.

En la discusión con el colectivo, se debe destacar el irracional gasto militar que existe en el mundo por la política de los países imperialistas y su implicación para el resto del mundo lo que contribuye al desarrollo político ideológico del estudiante.

Además se estimula la investigación, lo que conlleva a una búsqueda de información por parte del alumno y el análisis de datos de la realidad, así como el estudio de modelos aproximados, utilizando la ecuación de una función cuadrática, que permita extraer conclusiones y su vinculación con las funciones.

Es necesario incluir problemas sencillos de optimización como por ejemplo:

Se dispone de material suficiente para cercar un terreno rectangular que necesita 20 m de alambre. Determinar las dimensiones del terreno de manera tal que ocupe la mayor área posible.

En la discusión del ejercicio se debe destacar que:

- La suma de los lados es de 10 m.
- El área de todos los rectángulos que tienen el mismo perímetro representa una función cuadrática que el gráfico es una parábola que abre hacia abajo por tanto tiene valor máximo. Debe hacerse observar que el dominio de definición de esta función cuadrática es el intervalo $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, donde p es el perímetro del terreno.
- El rectángulo que tiene área máxima es un cuadrado, luego con las coordenadas del vértice es posible determinar las dimensiones que se quieren.

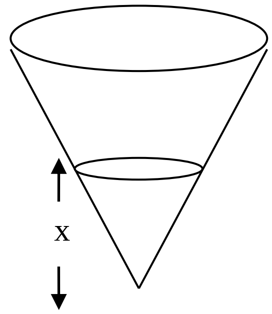
<u>Funciones potenciales</u>

Para el tratamiento de las funciones potenciales se debe partir de obtener el gráfico y las propiedades de la función $y = x^3$.

El tratamiento puede ser a través de un problema como el siguiente:

Un recipiente en forma de cono almacena cierto líquido. El diámetro de la base es de 12 m y la generatriz mide 10 m. Al comenzar a llenarse, después de transcurrido cierto tiempo, alcanza una altura x como lo muestra la figura.

a) Exprese, en función de x, el volumen del líquido.
b) Si cada 1 min se llena el 25% del volumen, en qué tiempo se llenará completamente, si se mantiene constante la velocidad del fluido.




En la discusión del ejercicio hay que destacar que:

- La variación de la altura es una función y que depende del radio de la circunferencia que delimita la superficie del líquido.
- Hay una relación entre el radio, la altura y la generatriz del cono.
- Los triángulos que tienen como lados la altura, el radio y la generatriz son rectángulos y semejantes, por tanto hay una relación entre el radio y la altura.
- Si la variable independiente es la altura "x" entonces el volumen del cono se determina por V (x) = $\frac{3\pi}{16}x^3$ (x $\in (0{,}10)$ , lo que expresa la ecuación de una función no conocida.

El tratamiento de la función y = $x^3$ (x$\in$IR) debe realizarse analizando previamente que hay una correspondencia donde a cada valor real x se le hace corresponder su cubo, expresarla como conjuntos de pares ordenados y obtener la representación en un sistema de coordenadas, por ejemplo, con ayuda de un asistente matemático. A partir del gráfico se analizan sus propiedades.

Para la función y = $x^{-1}$ se parte de obtener una correspondencia de $\left\{-3,-2,-1,\ -\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\frac{1}{2},1,\ 2,\ 3\right\}\rightarrow$IR donde a cada uno de estos números se le hace corresponder su recíproco. Aprovechar esta situación para analizar dominio, imagen, ceros, signo, paridad y monotonía.

Se hace un análisis para cuando el dominio es el conjunto de los números reales y se relaciona con el gráfico de la función anterior. Demostrar que la función es impar, en efecto f(-x)=-f(x).

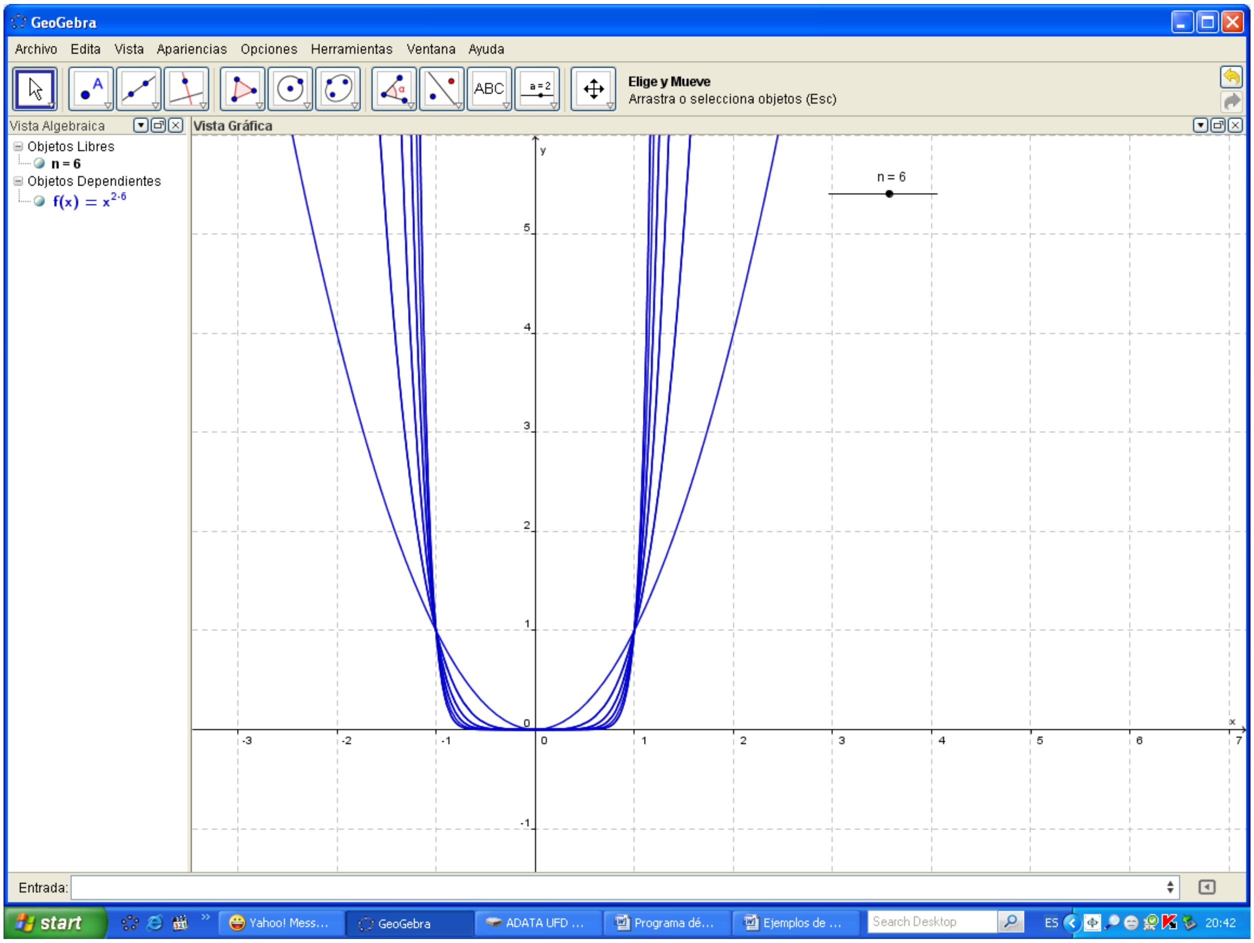
Por tanto estamos en condiciones de generalizar el concepto de funciones potenciales

Funciones potenciales

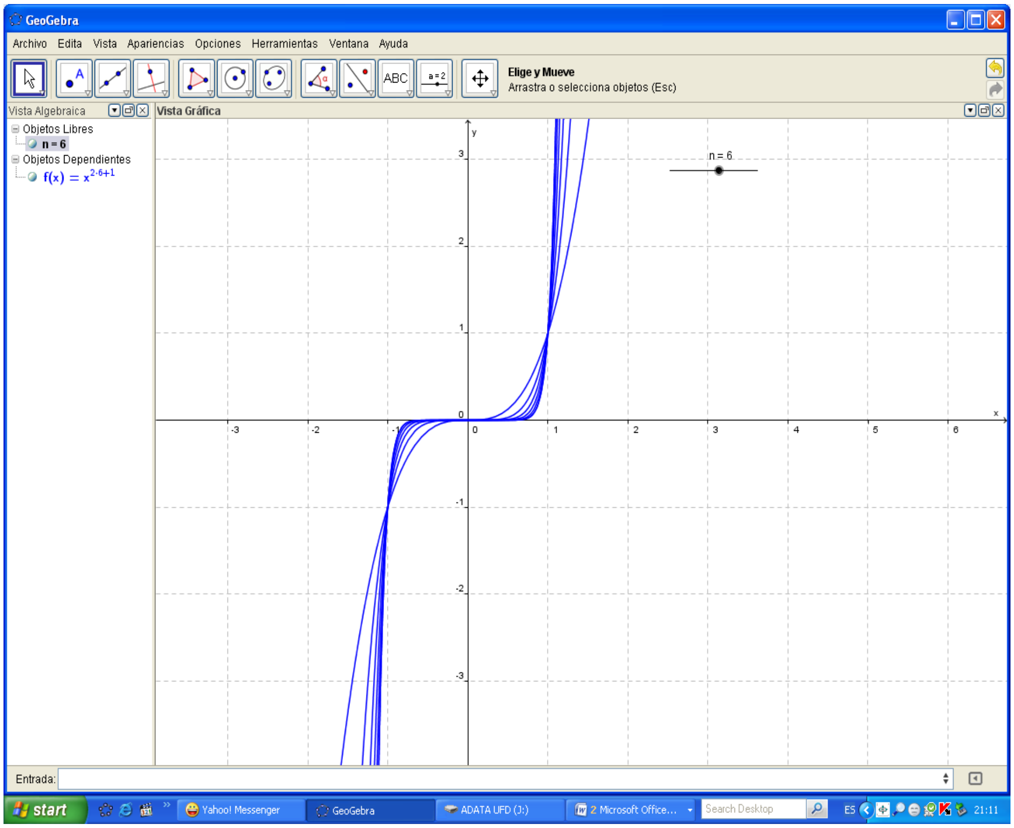
Una función f de un conjunto A (A$\subseteq$ R) en un conjunto B (B$\subseteq$ R) definida por medio de y = = f(x)= $x^n$ para todo x real, en la cual n es un número entero diferente de 0, se denomina función potencial; si n es positivo f es racional entera, si n es negativo, f es racional fraccionaria.

Los alumnos deben por sí mismos completar un cuadro con un análisis comparativo de estas funciones potenciales para el caso cuando n positivo par, y n positivo impar, n negativo par, y n negativo impar.

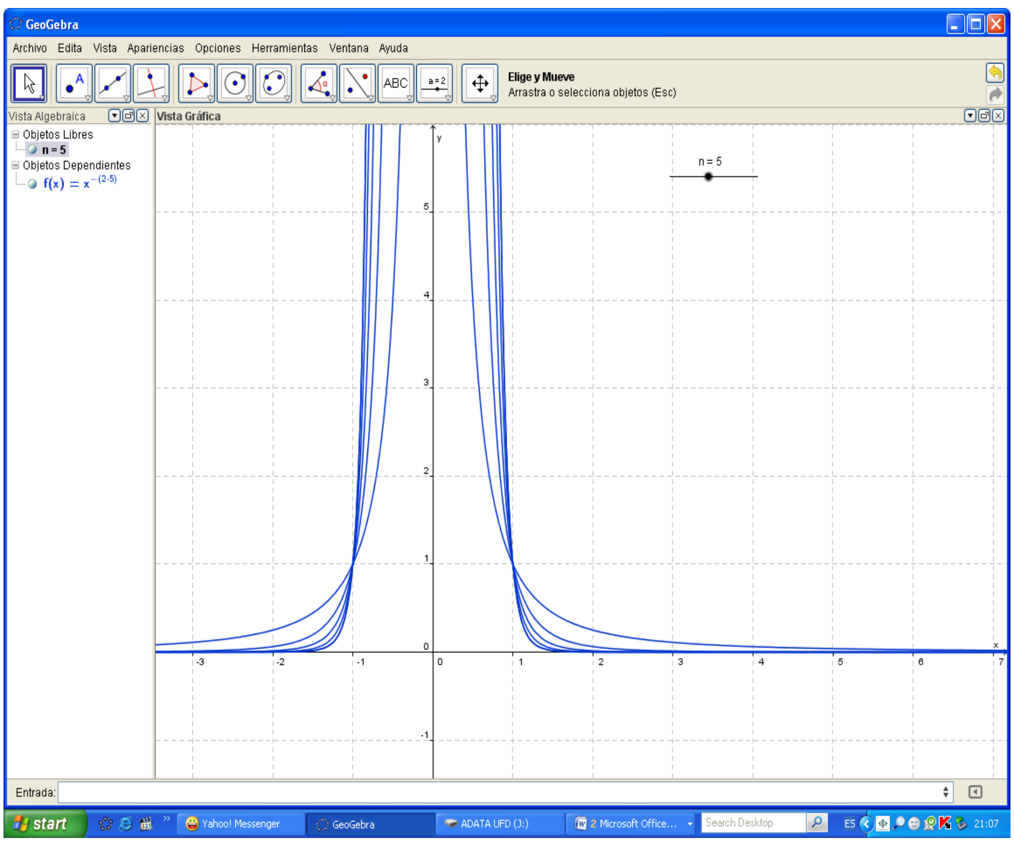
n positivo par: Son funciones pares. Para x≤o son monótonas decrecientes y para x≥0 monótonas crecientes. El gráfico de estas funciones es simétrico con respecto al eje x, contiene al origen y a los puntos P(1;1) y Q(-1;1).Las tangentes a la curva en una vecindad del origen se aproximan cada más al eje de las abscisas a medida que n crece, mientras que en una vecindad de P y Q tienen mayor pendiente a medida que n crece. Estas curvas se conocen como parábolas de orden 2n.



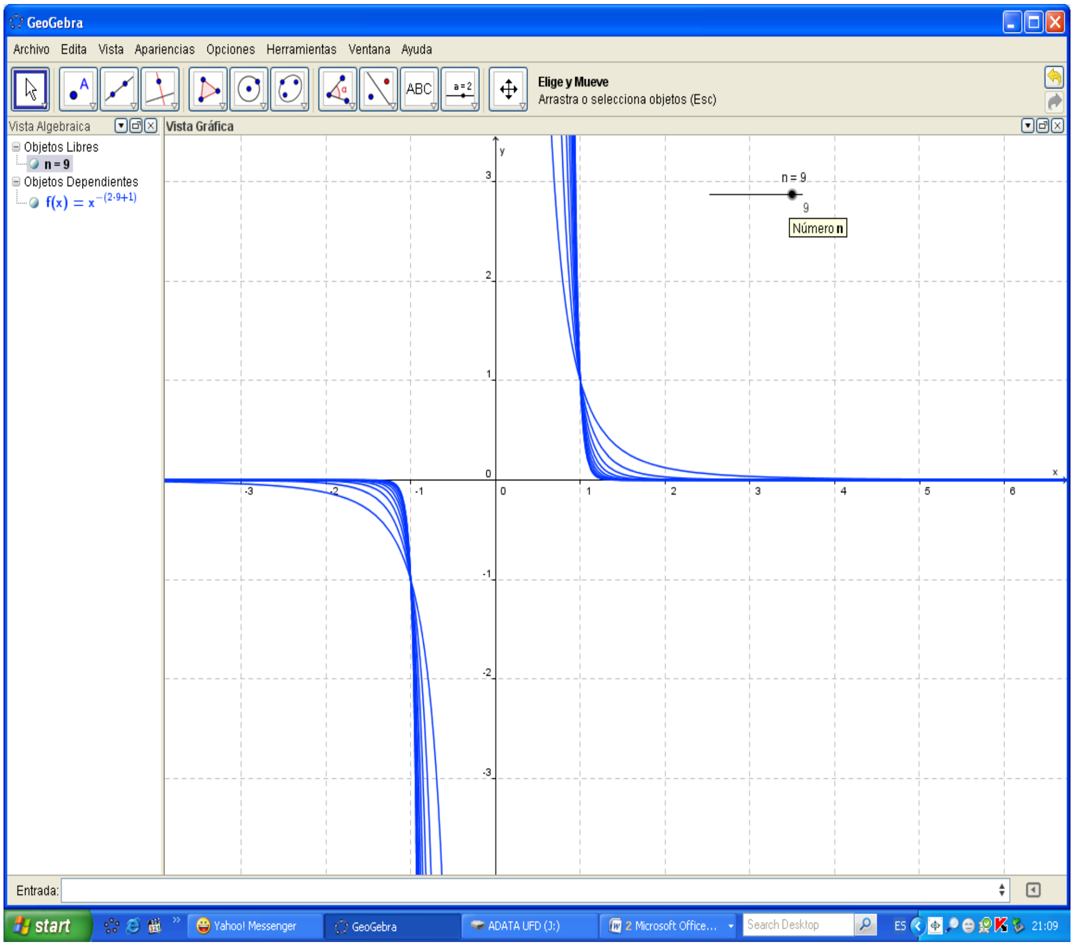

n positivo impar: Son funciones impares y monótonas crecientes en todo su dominio. El gráfico de estas funciones es simétrico con respecto al origen de coordenadas, contiene al origen y a los puntos (1;1) y (-1;-1). Las tangentes a la curva en una vecindad del origen se aproximan cada más al eje de las abscisas a medida que n crece, mientras que en una vecindad de P y Q tienen mayor pendiente a medida que n crece. Estas curvas se conocen como parábolas de orden 2n+1.




n negativo par: Son funciones pares. El gráfico de estas funciones es una curva simétrica al eje de las ordenadas, Para x=0 no está definida y tiene por tanto dos ramas. El eje positivo y negativo de las x y el eje positivo de las y son asíntotas.



n negativo impar: Son funciones impares. El gráfico de estas funciones es una curva centralmente simétrica al origen, Para x=0 no está definida y tiene por tanto dos ramas.




Un concepto que se debe introducir en esta temática es el de función inyectiva partiendo de la correspondencia entre los conjuntos B (codominio) y A( dominio). Por tanto se concluye con los alumnos que si ($x_1$; $y_1$) ; ($x_2$ ; $y_1$) son pares ordenados de una función inyectiva entonces $x_1 = x_2$

Reconocer que la función $y = x^3$ ( x $\in$IR) es inyectiva, pero $y=x^2$ cuando x $\in$IR no lo es, sin embargo es inyectiva cuando x$\in$IR, x > 0 ó x <0, entre otros ejemplos. Proponer ejercicios sencillos en los que tenga que tenga que analizar la inyectividad de una función.

Clasifique las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escriba V si es verdadero y F si es falsa en la línea que le antecede. Fundamente las falsas.

a) ____ Una función monótona creciente en todo su dominio es inyectiva.

b) ____ Todas las funciones impares son inyectivas.

c) ____ Si f(x) es una función potencial de exponente entero positivo tal que f(a) = b entonces $a^n = b$.

d) _____ Si f(x) = $\frac{1}{x}$, entonces f($\frac{1}{x}$) = x para las x$\neq$ 0.

e) _____ Si f(x) es una función potencial de exponente entero no positivo entonces para valores ay b de su dominio con a < b se cumple que f(a) < f(b).

2. Escriba la ecuación de una función que cumpla las siguientes propiedades. Represéntela gráficamente.

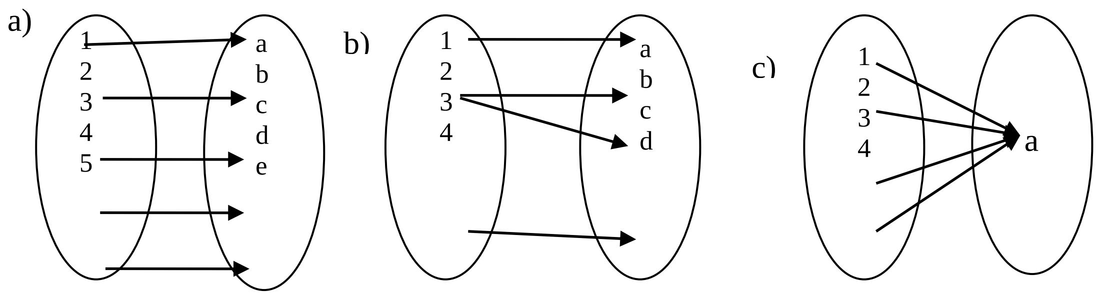
- Es impar.
- f(1) = 3
- Es inyectiva

Funciones inversas de las funciones potenciales

Para tratar el concepto de función inversa puede utilizarse la siguiente vía:

Se recuerda el concepto de función inyecytiva , que puede ser a través del siguiente ejercicio:

Analizar cuáles de las siguientes funciones son inyectivas:




d) f= {(1; 1), (2;3), (3; 5), (4; 7), (5;9)}   e) g = {(1; 2), (2;2) , (3; 4),

Se destacan los dominios y conjuntos imágenes de las funciones, fundamentalmente las que son inyectivas.

Después se puede pedir que analicen al invertir los conjuntos, si la correspondencia de B $\rightarrow$A es una función.

Del análisis se concluye que si las funciones son inyectivas se puede establecer una correspondencia de B(codiminio) $\rightarrow$A(dominio), para obtener una nueva función y que se denomina función inversa y se denota por $f^{-1}$.

Se define el concepto de función inversa y se establece la relación entre el dominio y la imagen de las dos funciones.

Para el inciso d) se les pide que obtenga los pares ordenados de la función inversa $f^{-1}$. Se representa gráficamente la función y su inversa y se destaca que si se traza la recta y =x , los gráficos de f y $f^{-1}$ son simétricos respecto a la recta.

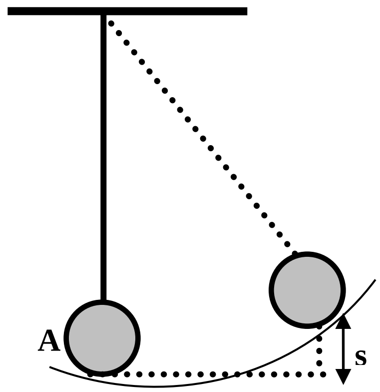
De la inferencia anterior, se les pide trazar el gráfico de $y = x^3$ ($x \in IR$) y se les pregunta que si esta función posee inversa.

Se concluye y se obtiene la función $y = \sqrt[3]{x}$ ($x \in IR$) gráfica y analíticamente y se relacionan sus propiedades. Análogamente se obtiene la función $y = \sqrt{x}$ ($x \in IR^+$, $IR^+$: conjunto de los reales no negativos) como inversa de la función $y = x^2$ ($x \in IR^+$).

Se deben realizar ejercicios en que determinen valores funcionales, representen gráficamente funciones que se obtienen por traslación, dilatación, contracción y reflexión y determinar sus propiedades.

Proponer problemas de aplicación como el siguiente:

La velocidad (en metros por segundos) de una pelota oscilando en el extremo de un péndulo está dada por la ecuación $v = \frac{\sqrt{2-s}}{2}$ donde "s" representa el desplazamiento vertical en centímetros de la pelota desde su posición de reposo.




a) ¿Cuál es la velocidad cuando toma la posición A?
b) Haga su gráfico en el intervalo $0 \leq s \leq 2$.
c) Describa el comportamiento físico de la pelota cuando está oscilando.

Para el repaso, consolidación y sistematización de la unidad se proponen los siguientes ejercicios:

1. Represente gráficamente una función que cumpla las siguientes propiedades:
   - El dominio son los valores reales de x tales que pertenezcan al intervalo (-3; 5).
   - La función es monótona creciente en todo su dominio.
   - El valor máximo de la función es $y_{max} = 1,2$.
2. Sean las ecuaciones siguientes que representan funciones, definidas todas en el conjunto de los números reales.
   $f(x) = 3x + 1$ ; $g(x) = 4 - x^2$ ; $h(x) = 5$ y $p(x) = 2|x| - 1$.

2.1 Complete los espacios en blanco de manera tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) La función que tiene como ecuación a f(x) es monótona ____________.
b) El valor máximo de la función g(x) es:______.
c) La función p(x) es negativa en el intervalo:________.
d) El conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor $\frac{p(-2)+h(0)}{g(2)+f(-\frac{1}{2})}$ es:______

2.2 Represente gráficamente las funciones.

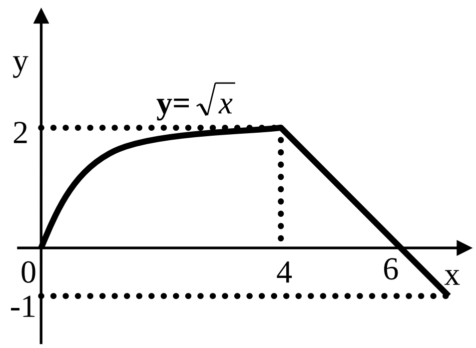
3. A continuación se representan las funciones f(x) y g(x) por sus pares ordenados:

   f(x) = { (1; 2) , (2; 1) , (3; 4) , (4, 3)}

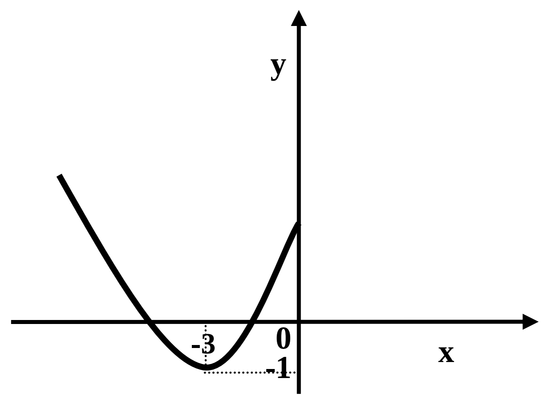
   g(x) = { (-1;0), (0;1) , (1; -1), (2; 1)}

   a) Escriba el dominio y la imagen de cada función.
   b) Analice si las funciones son inyectivas. Escriba, en caso de que sea inyectiva, los pares ordenados de la función inversa.

4. La función de ecuación $y = \sqrt[3]{x}$ tiene como dominio al conjunto de los números reales que se encuentran en el intervalo [-8; 1).
   a) Determine su imagen.
   b) Esboce el gráfico de la función.
5. La siguiente gráfica representa una función:

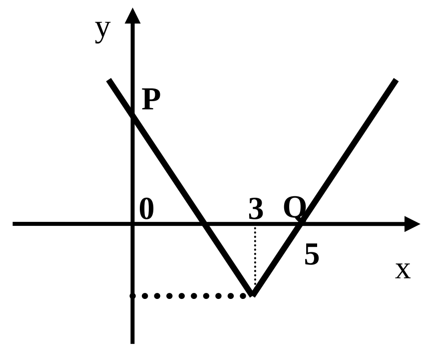



   a) Analice la monotonía de la función.
   b) ¿Para qué valor de x se obtiene el valor mínimo de la función?
6. En la gráfica se representa una función por medio de una ecuación del tipo $y = (x + 3)^2 + e$ para $x \leq 0$.

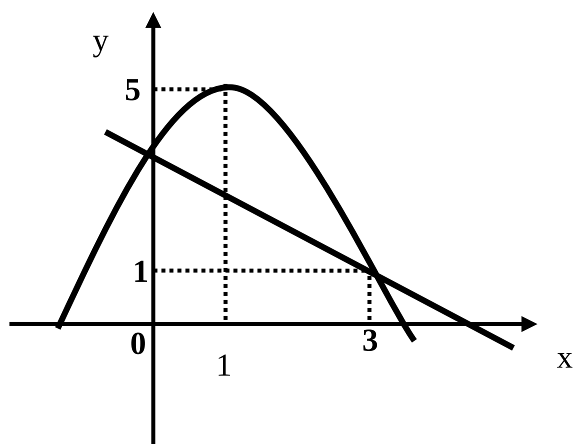



   a) Halla los parámetros de la ecuación que describe la función.´
   b) Escriba el conjunto imagen de la función representada.
   c) ¿Para qué valores de "x" la función es no positiva?
   d) Determine el valor máximo de la función en el intervalo [ -3; 0].
7. Si $(-1; 2) \in f^{-1}(x)$, sabiendo que f(x) es una función par e inyectiva, determine el valor de f(-2).
8. Analice si la siguiente proposición es verdadera. Fundamenta tu respuesta:
   **"Toda función constante tiene inversa"**
9. En la gráfica se representa una función cuadrática con una ecuación de la forma:
   $y = |x + d| + e \ (x \in IR)$

   a) De las ecuaciones que se dan a continuación seleccione y marque con una **X** la ecuación que corresponde a la función:
      __ $y = |x+3| - 2$ ___ $y = |x-3| - 2$
      __ $y = |x+3| + 2$ ___ $y = |x-3| + 2$
   b) Escriba su conjunto imagen.
   c) Compruebe que $\overline{OP} = \overline{OQ}$
   d) ¿Qué monotonía posee la función en el intervalo [0;3]?
   e) Escriba un intervalo donde la función sea



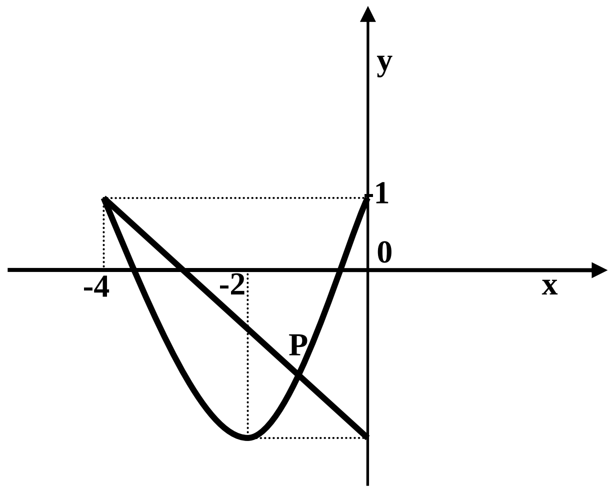

En la gráfica se representa la función y= f(x) = -x + 4($x \in$IR) y la función cuadrática con ecuación de la forma y=g(x) = - $x^2$ + bx + c($x \in$IR). Estas funciones se intersecan en dos puntos.




a) Determine la ecuación de la función cuadrática g.
b) "Para todos los valores reales de x, g(x) ≤ f(-1)". ¿Es cierta la proposición anterior? Fundaméntela.
c) Escriba un intervalo donde las funciones f y g tengan diferente monotonía.

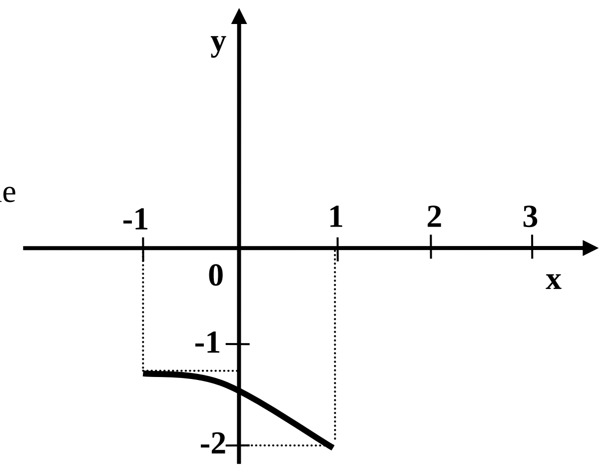
10. En la gráfica se representan las funciones f y g de [-4; 0] en IR con f(x)=-(x+3) y g(x)= $(x + d)^2$ + e.

a) Escriba la ecuación de g.
b) Determine un intervalo donde las funciones f y g tengan signos diferentes.
c) La recta y la parábola se intersecan en el punto P. ¿A qué distancia del eje "x" se encuentra P?




11. En la gráfica se representa la función h(x) = $\frac{1}{x-2} - 1$ en el intervalo [-1;1).

a) Complete el gráfico en el intervalo [1;3].
b) Analice si la función es inyectiva.
c) Marque con una equis (**x**) la opción que considere correcta:




a) La función es monótona:

___ Creciente en todo su dominio.
___ Decreciente en todo su dominio.
___ Creciente solo para las x∈IR; x<1.
___ Decreciente solo para las x∈IR; x<1.

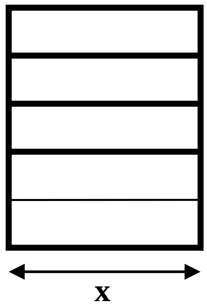
b) La imagen de la función es el conjunto:

___ IR ___ {y∈IR ; y ≠ 2} ___ {y∈IR ; y ≠ 1} ___ {y∈IR ; y ≠ -1}

c) La función es positiva en el intervalo:

___ (2; ∞) ______ (2; 3) _____ (3; ∞) _____ Ninguno de los anteriores

14. Un carpintero debe diseñar una ventana en forma rectangular que tiene un área de 2,20 $m^2$, como se muestra en la figura:

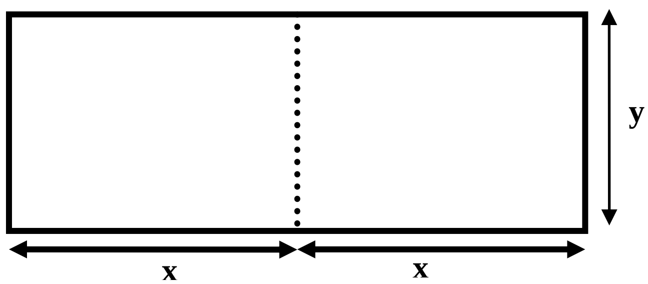



a) Exprese en una ecuación la dependencia de la altura de la ventana de la variable independiente “x”.

b) Analice si la ecuación representa una función y determine su dominio y conjunto imagen.

c) Representa la función en $0 < x < 4$

15. Se ha cercado un terreno rectangular con 36 m de alambre como lo muestra la figura:




El terreno fue dividido en dos partes iguales para diferentes fines productivos. Determine las dimensiones de cada parte del terreno de forma tal que tenga un área máxima.

16. Completa los espacios en blanco utilizando las expresiones”siempre”, “algunas veces” o “nunca” según corresponda, de forma tal que se obtengan proposiciones verdaderas. Fundamenta en cada caso.

a) Las función definida en R por y = f(x)= /x-6/+2 _____ tiene inversa.

b) Las funciones $y = f(x) = ax^n$ son ______no negativas y simétricas respecto al eje de las ordenadas.

Transforma las proposiciones para que se pueda sustituir las expresiones “algunas veces” o “nunca” por “siempre”.

**Unidad 4: Trigonometría/ Aplicaciones a la Geometría**

**1. Introducción**

La trigonometría forma parte del arsenal mínimo de conocimientos del ciudadano, ya que numerosas actividades prácticas de las ciencias y las tecnologías se fundamentan en los conceptos, relaciones y procedimientos trigonométricos. El estudio de la trigonometría es por tanto una parte esencial de la asignatura Matemática, que contribuye al cumplimiento de los objetivos de la asignatura en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la escuela media y media superior.

Los conocimientos precedentes sobre trigonometría se adquieren en el nivel medio básico, al tratar las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y sus aplicaciones más elementales. En décimo grado, a través de esta unidad, se amplían las razones trigonométricas a ángulos cualesquiera y se introducen y fijan las operaciones básicas que conforman las habilidades de cálculo trigonométrico mediante la aplicación de las fórmulas de reducción al primer cuadrante y las relaciones básicas entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo; se desarrollan la habilidades en la resolución de las ecuaciones trigonométricas y se hace un aporte al desarrollo de la capacidad de demostración de los alumnos y de poder resolver problemas de aplicación a la geometría, la Física, a otras ciencias y a la vida práctica.

Los cambios que se introducen con respecto a los programas vigentes hasta el curso 2012-2013 son los siguientes:

- Se retoman una parte de los contenidos trigonométricos que se impartían en onceno grado.
- Se integra el estudio de la trigonometría y sus aplicaciones en una misma unidad.
- Se completan las razones trigonométricas conocidas al introducir las razones trigonométricas recíprocas (secante y cosecante).

Como consecuencia de estos cambios, lo esencial que se debe lograr de esta unidad corresponde al cálculo trigonométrico y sus aplicaciones.

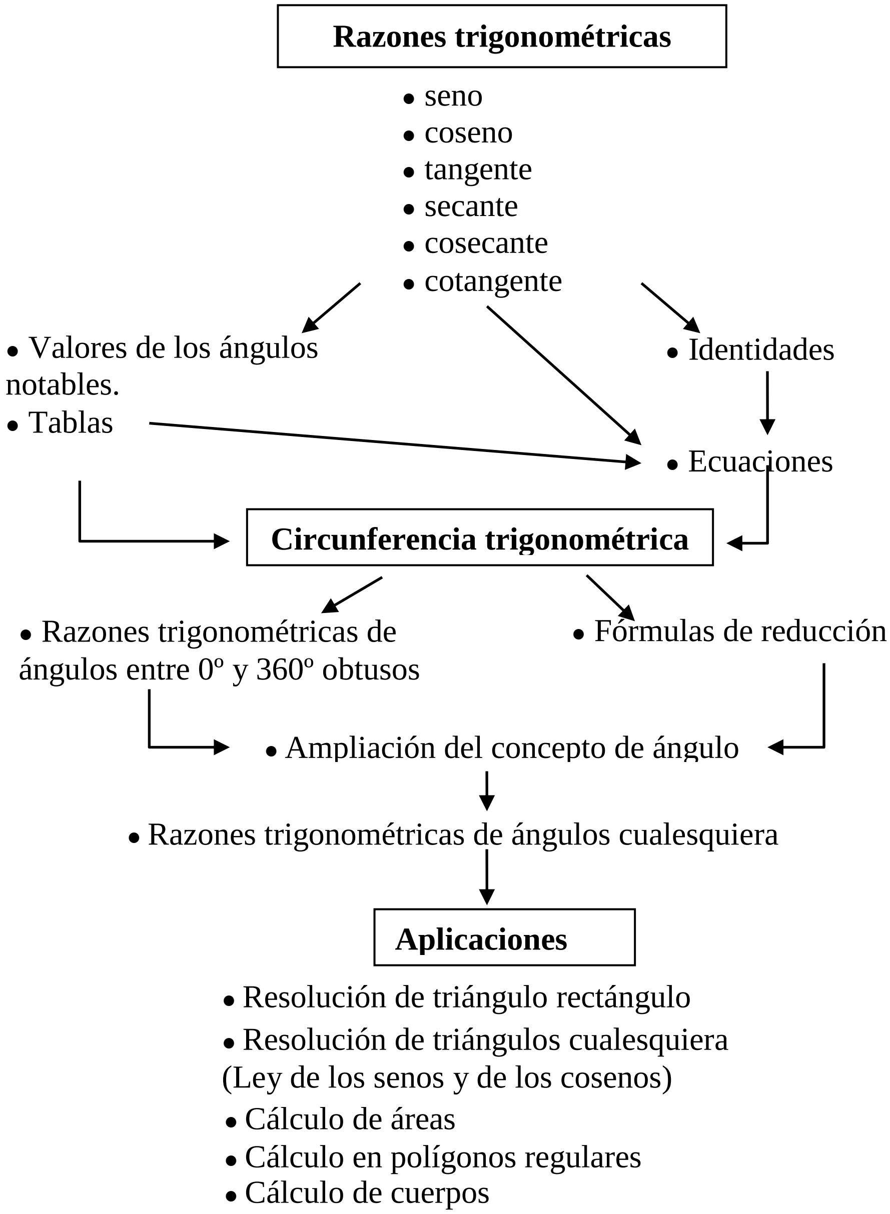
Se continúa la ampliación y profundización de los contenidos trigonométricos en onceno grado con el estudio del sistema circular de medida de ángulos, de otras identidades y de las funciones trigonométricas.

**Objetivos de la unidad**

Los alumnos deben ser capaces de:

- Calcular razones trigonométricas de ángulos cualesquiera en el sistema sexagesimal, aplicando sus definiciones, las relaciones fundamentales entre ellas, el conocimiento de las razones trigonométricas de los ángulos notables y axiales, las fórmulas de reducción, las tablas trigonométricas y las reglas para el cálculo aproximado.
- Resolver identidades y ecuaciones trigonométricas aplicando lo aprendido sobre la generalización del concepto de ángulo para calcular razones trigonométricas de ángulos cualesquiera y otros recursos algebraicos y trigonométricos como las identidades trigonométricas fundamentales.
- Resolver problemas y ejercicios de aplicación a la geometría del plano y del espacio, otras ciencias y la vida práctica, aplicando los teoremas sobre la resolución de triángulos cualesquiera, en particular, la ley de los senos y los cosenos.

**2. Estructura interna de la unidad**




Esquema 4.1

De esta estructura interna resultan tres unidades temáticas:

- Razones trigonométricas.
- Circunferencia trigonométrica
- Aplicaciones a la Geometría.

| | Contenidos | Horas/clase |
|---|---|---|
| 4.1 | Repaso de las razones trigonométricas. Teorema del triángulo rectángulo con un ángulo de 30°. Repaso de las razones trigonométricas de los ángulos notables (30°, 45°, 60°). Relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos complementarios. | 15 h/c |
| 4.2 | Círculo trigonométrico. Razones trigonométricas de ángulos de 0° a 360° .Signo de las razones trigonométricas en los diferentes | 17 h/c |

| | | |
|---|---|---|
| | cuadrantes. Fórmulas de reducción. Razones trigonométricas de ángulos axiales. Generalización del concepto de ángulo. Fórmulas de reducción de ángulos negativos. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera. Aplicación a la demostración de identidades y resolución de ecuaciones. Identidades trigonométricas fundamenta Aplicaciones. Sistema circular de medida de ángulos. Medida de ángulos notables y axiales en el sistema circular. Conversión del sist sexagesimal al circular y viceversa. | |
| 4.3 | Aplicaciones de la trigonometría. Resolución de triángulos cualesquiera. Ley de los senos y de los cosenos. Expresión del área de un triángulo en función de las medidas de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre estos. Polígonos regulares. Ejercicios y problemas donde se incluirán ejercicios de aplicación a la Geometría (incluido el cálculo de cuerpos) y la Física. | 23 h/c |

Para la preparación de las clases correspondientes a esta unidad se podrá utilizar el Libro de texto de décimo grado (Capítulo 3 página 144 y los ejercicios de los epígrafes 1 al 7; el Capítulo 4 Aplicaciones de la trigonometría), así como el Manual de Ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior (MEM) y una selección de las video-clases de la unidad 3 de onceno grado.

Para lograr lo antes expuesto es importante que los alumnos sean capaces de:

- Memorizar las razones trigonométricas y los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables y axiales.
- Calcular las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y en la circunferencia trigonométrica.
- Deducir las relaciones entre las razones trigonométricas y las identidades trigonométricas fundamentales.

[$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$; $\tan x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ ; $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ; $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$ ; $\csc x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$ ;
$1 + \tan^2x = \sec^2x$ ; $1 + \cot^2x = \csc^2x$ ].

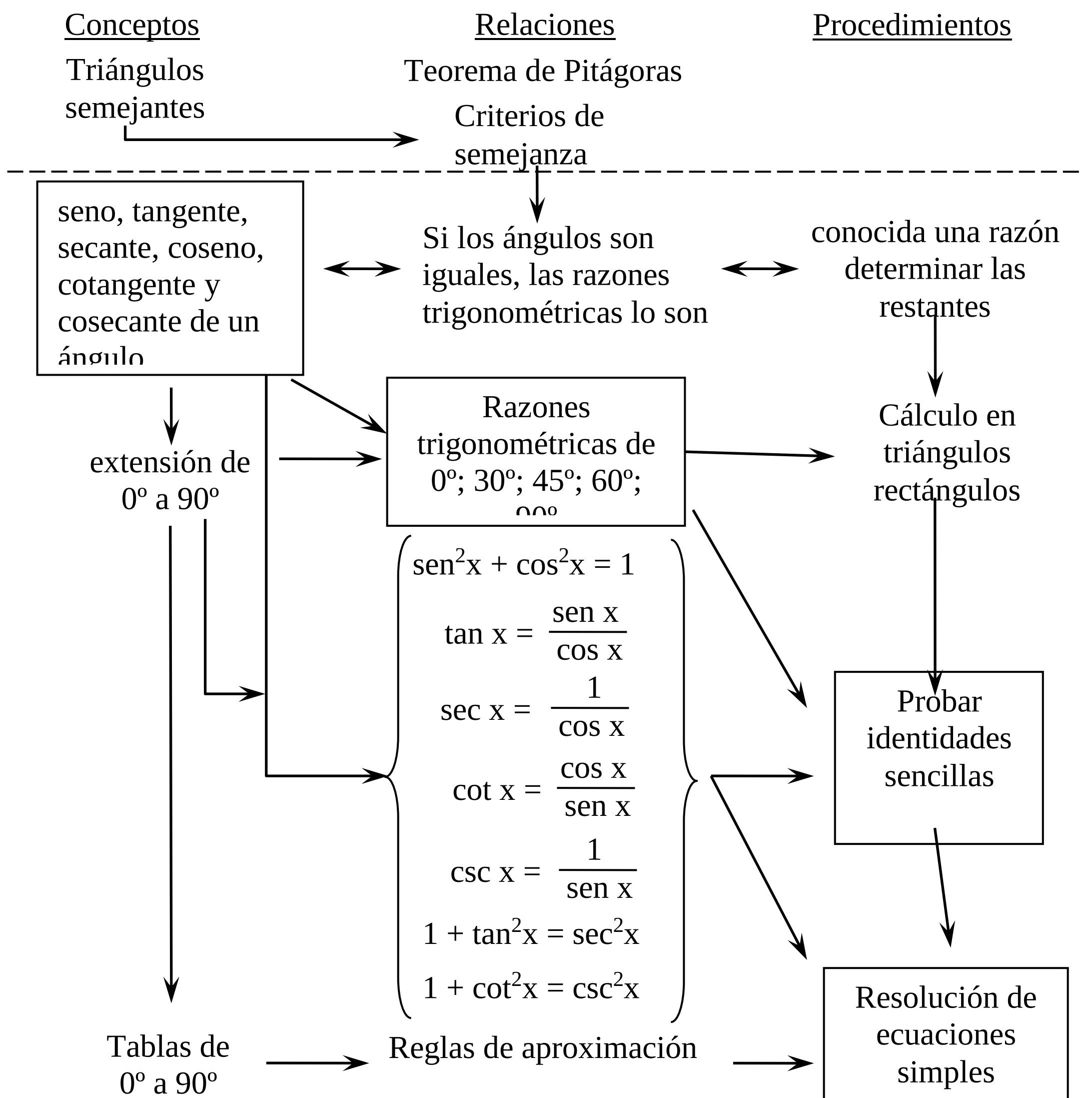
- Conocer el signo de las razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.
- Deducir las fórmulas de reducción en los diferentes cuadrantes.
- Calcular razones trigonométricas, utilizando para ello los valores notables, las tablas trigonométricas y las fórmulas de reducción para los diferentes cuadrantes, las relaciones entre las razones trigonométricas y las identidades trigonométricas.
- Utilizar correctamente las reglas del cálculo aproximado en el cálculo con las razones trigonométricas.
- Resolver triángulos rectángulos y aplicar estos conocimientos a la resolución de ejercicios con texto y problemas.
- Resolver ecuaciones y demostrar identidades trigonométricas utilizando la definición de las razones trigonométricas, las relaciones entre ellas y las identidades trigonométricas fundamentales.
- Comprender la ampliación del concepto de ángulo, el concepto de ángulos coterminales y aplicarlos al cálculo de razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.
- Explicar la demostración de la ley de los senos y los cosenos.
- Resolver ejercicios con texto y problemas de aplicación al cálculo de polígonos regulares y en general de figuras planas y en el espacio (cuerpos), a la física y otras

ciencias, utilizando la ley de los senos y los cosenos y lo aprendido sobre la resolución de triángulos cualesquiera.

**Indicaciones para el desarrollo de las unidades temáticas**

**4.1 Razones trigonométricas (15 h/c)**

En esta unidad temática se tratan las razones trigonométricas, el cálculo de estas con los ángulos notables y el uso de tablas, la demostración de identidades trigonométricas sencillas y la resolución de ecuaciones trigonométricas.




Esquema

<u>Tratamiento de los conceptos: seno, tangente, secante, coseno, cotangente y cosecante.</u>

El contenido que corresponde a este punto esencial aparece en el epígrafe 1 del Capítulo 3.

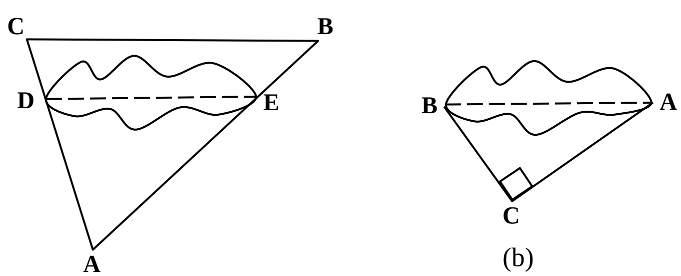
Es conveniente antes de iniciar el estudio de la razones trigonométricas, reactivar a través de ejercicios los conocimientos previos .Se recomienda orientar previamente un sistema de tarea con ejercicios integradores (sobre conceptos geométricos básicos, semejanza e igualdad de triángulos…)

En este punto esencial lo fundamental a lograr es que los alumnos memoricen las definiciones de las razones trigonométricas, comprendan la unicidad de las mismas para cada ángulo, las puedan aplicar a la resolución de triángulos rectángulos y establezcan las relaciones entre ellas para los ángulos complementarios.

Para el logro de estos objetivos es importante que los alumnos comprendan la utilidad e importancia de la trigonometría en los distintos campos de su aplicación, por lo que, es imprescindible desde el inicio de esta unidad, y durante toda ella, tener una adecuada motivación tal que despierte el interés por el estudio de esta rama de la Matemática.

Según lo planteado anteriormente es recomendable que el profesor inicie el tratamiento de esta unidad con una conversación de clase, en la que a partir de necesidades prácticas, los alumnos comprendan la utilidad de las razones trigonométricas y se interesen por ellas. Vinculado con el aseguramiento de las condiciones previas para la unidad como son la semejanza de triángulos y el Teorema de Pitágoras plantear la situación de medir la distancia entre dos puntos inaccesibles: por ejemplo, hallar el ancho de una presa.

La geometría puede en estos casos dar respuesta a esta situación a través de la semejanza de triángulos o el Teorema de Pitágoras, como se muestra en la figura (figura 4.3). En el caso del inciso a) se han determinados tres puntos A, B y C de modo que $\overline{DE}$ (ancho de la presa) sea paralela a $\overline{BC}$ y probando la semejanza entre los triángulos ABC y ADE por el teorema Fundamental de la Semejanza de Triángulos establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos y así calcular $\overline{DE}$ el ancho de la presa. En el cado del inciso b) se ha determinado un punto C tal que $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ de forma tal que el triángulo ABC sea rectángulo en C, en el cual $\overline{AB}$ es la hipotenusa y mediante el Teorema de Pitágoras de determina esta longitud que representa el ancho de la presa.




(a) (b)

Fig. 4.3

En este ejemplo, puede destacarse que en ambas vías se trabaja a partir de longitudes, pero a veces se dispone simultáneamente de ángulos y longitudes, por ejemplo:

En la figura. 4.4 se muestra un muchacho empinando un papalote que ha soltado 20 m de hilo y el ángulo que forma este y la horizontal es de 30º, ¿cuál es la altura a que se encuentra el papalote? (suponiendo el hilo recto).

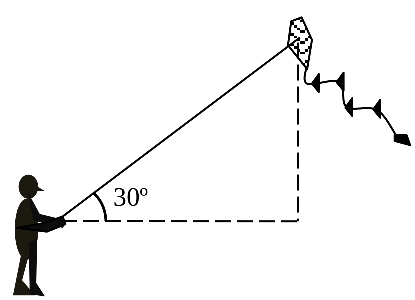



Fig. 4.4

Otra situación puede ser, conocidas ciertas longitudes sea necesario determinar un ángulo, por ejemplo: En lo alto de un edificio de 15 m de altura y una casa de 5,0 m de altura que se encuentran en aceras opuestas están situadas dos palomas, una en cada techo. Se tira una miga de pan en la calle a 6,0 m de la base del edificio y a 12m de la casa. Ambos pájaros se lanzan por ella al mismo tiempo y llegan en el mismo instante, (figura 4.5) ¿cómo determinar la inclinación con que voló cada paloma?

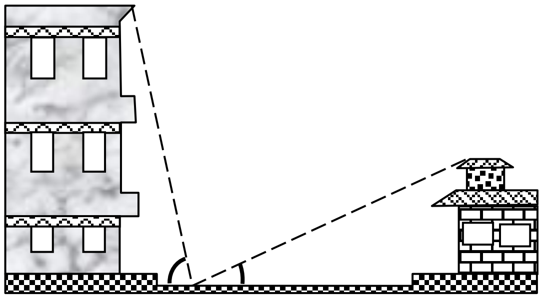


Fig. 4.5

A partir de estos ejemplos u otros seleccionados por el profesor los alumnos reactivarán los conocimientos acerca de la resolución de triángulos rectángulos, el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas conocidas.

Al reactivar el Teorema de Pitágoras, debe tenerse en cuenta que tienen como premisa el triángulo rectángulo; que establecen relaciones métricas entre los lados de dichos triángulo. Pero también estudiaron otras relaciones métricas en el triángulo rectángulo, las que se pueden establecer entre los ángulos y los lados de dicho triángulo: las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
(Definición 1, página 145 Libro de texto Décimo grado)

Mediante una conversación de clase, se podrá concluir que: como en el triángulo rectángulo la hipotenusa es el mayor de los lados del triángulo

entonces: sen $\alpha = \frac{a}{c} < 1$ , cos $\alpha = \frac{b}{c} < 1$

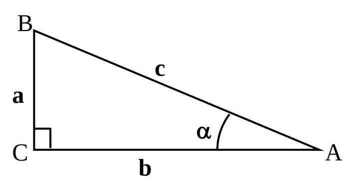



Fig 4.6

y en el caso de la tangente se pueden dar

dos situaciones: si $a < b$ entonces tan $\alpha = \frac{a}{b} < 1$,

si $a > b$ entonces tan $\alpha = \frac{a}{b} > 1$

Se debe analizar con los alumnos si estas son las únicas razones que se pueden establecer entre los lados del triángulo rectángulo relacionadas con un ángulo. El profesor debe tener en cuenta que lo esencial es que el alumno *obtenga* las razones recíprocas de las anteriores y concluir con la definición 2.

Definición 2

Sea $\alpha$ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo ABC (fig. 4.6) de catetos a y b e hipotenusa c, se llama:

- cotangente de $\alpha$ y se denota cot $\alpha$ a la razón $\frac{b}{a}$ , entre la longitud del cateto adyacente a $\alpha$ y la longitud del cateto opuesto.

- secante de $\alpha$ y se denota sec $\alpha$ a la razón $\frac{c}{b}$ , entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente a $\alpha$.
- cosecante de $\alpha$ y se denota csc $\alpha$ a la razón $\frac{c}{a}$ , entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto a $\alpha$.

También de esta definición podemos concluir que como la hipotenusa es el mayor de los lados del triángulo rectángulo entonces:
sec $\alpha = \frac{c}{b} > 1$ , csc $\alpha = \frac{c}{a} > 1$
y en el caso de la cotangente (al igual que la tangente), se pueden dar dos situaciones:
si $b < a$ entonces cot $\alpha = \frac{b}{a} < 1$
si $b > a$ entonces cot $\alpha = \frac{b}{a} > 1$

El alumno debe reconocer que las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del triángulo rectángulo seleccionado sino de la amplitud del ángulo para cualquiera sea el triángulo. Una vía metodológica puede ser:

A partir de la resolución del siguiente ejercicio.

Sean los triángulos ABC y A′B′C′ rectángulos en C y C′ respectivamente (Fig.4.7), tales que los ángulos $\alpha$ y $\alpha'$ sean iguales:
a) Demuestra que $\Delta$ ABC ~ $\Delta$A′B′C′
b) Establece la proporcionalidad de los lados homólogos.

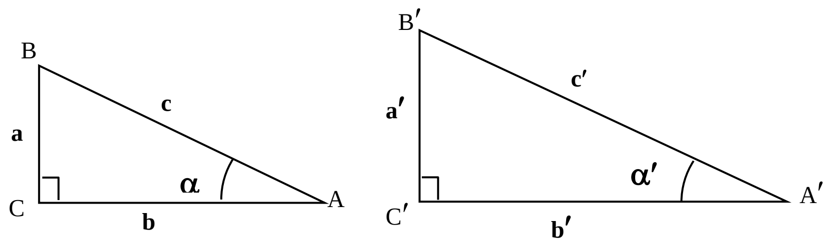



Fig. 4.7

Una vez obtenida la proporcionalidad de los lados homólogos en los triángulos semejantes: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Combinando dos a dos estas razones y aplicando el Teorema Fundamental de las Proporciones establecer las razones que conllevan a las razones trigonométricas de un ángulo

$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ ; $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ ; $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ; $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ ; $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ ; $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$

Se enuncia el teorema 1

Teorema 1

Si ABC y A′B′C′ son dos triángulos rectángulos en C y C′ tales que $\alpha = \alpha'$ entonces:

sen $\alpha$ = sen $\alpha'$; cos $\alpha$ = cos $\alpha'$ ; tan $\alpha$ = tan $\alpha'$;

| |
|---|
| $\cot \alpha = \cot \alpha'$;  $\sec \alpha = \sec \alpha'$;  $\csc \alpha = \csc \alpha'$ |

A continuación el profesor puede realizar actividades como la del Ejemplo 1 del Epígrafe 1 del L.T de décimo grado, dado un ángulo determinar los valores de sus razones trigonométricas por medición (puede utilizar el asistente matemático Geogebra) y el ejemplo 2 del texto.

Otro ejemplo puede ser:

En un $\Delta ABC$ se tiene que: $\angle C = 90^o$, $\overline{AB} = 25$ cm; $\overline{BC} = 7{,}0$ cm y $\overline{AC} = 24$ cm

Calcula las razones trigonométricas

a) sen $\alpha$ y cos $\beta$  b) tan $\alpha$ y cot $\beta$  c) sec $\alpha$ y csc $\beta$

En la resolución del Ejemplo los alumnos podrán concluir que:

$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}$ ; $\tan \alpha = \cot \beta = \frac{a}{b}$  $\sec \alpha = \csc \beta = \frac{c}{b}$

de forma análoga se obtiene:

$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c}$;  $\cot \alpha = \tan \beta = \frac{b}{a}$;  $\csc \alpha = \sec \beta = \frac{c}{a}$

Concluir que como analizamos anteriormente las razones trigonométricas dependen sólo de las amplitudes de los ángulos,

¿qué relación existe entre los ángulos $\alpha$ y $\beta$ en el triángulo rectángulo? Los ángulos $\alpha$ y $\beta$ son complementarios, es decir,

$\alpha + \beta = 90^0$ ó $\alpha = 90^0 - \beta$ ; $\beta = 90^0 - \alpha$.

Esto nos permite concluir que:

| |
|---|
| El seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento y viceversa.<br>Simbólicamente : $\operatorname{sen} \alpha = \cos (90^o - \alpha)$ ; $\cos \alpha = \operatorname{sen} (90^o - \alpha)$ |
| La tangente de un ángulo es igual a la cotangente de su complemento y viceversa.<br>Simbólicamente : $\tan \alpha = \cot (90^o - \alpha)$ ; $\cot \alpha = \tan (90^o - \alpha)$ |
| La secante de un ángulo es igual a la cosecante de su complemento y viceversa.<br>Simbólicamente : $\sec \alpha = \csc (90^o - \alpha)$ ; $\csc \alpha = \sec (90^o - \alpha)$ |

Para la fijación se presentarán sistemas de tareas que contengan problemas de naturaleza geométrica, relacionados con situaciones de la vida cotidiana y de otras ciencias, que requieran esbozar o construir figuras geométricas, comparar y calcular longitudes de segmentos, amplitudes de ángulos, perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas, pero también podrán afrontar la resolución de problemas de demostración de nuevas propiedades geométricas, que requerirán de la elaboración de conjeturas con ayuda de asistentes geométricos.

La ejercitación puede seleccionarse de los ejercicios del epígrafe 1 u otros creados por el profesor.

<u>Tratamiento de los valores de las *razones trigonométricas de ángulos notables*</u>

Lo fundamental en este  punto esencial es que los alumnos memoricen los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables; el contenido correspondiente aparece en el epígrafe 2.

Puesto que estos valores de las razones trigonométricas se usan con frecuencia es necesario que las memoricen. Esta memorización no debe ser mecánica. Para lograr el objetivo propuesto se puede proponer dibujar un triángulo equilátero de lado 2,0 u y al trazar la altura relativa a uno de sus lados como todas las rectas notables en el triángulo equilátero coinciden entonces es bisectriz y mediana, y aplicando el teorema de Pitágoras ésta medirá $\sqrt{3}$ u (Fig.4.8 a). Trabajando en uno de los triángulos rectángulos en que la altrura descompone al trtiángulo equilátero, obtener los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º.

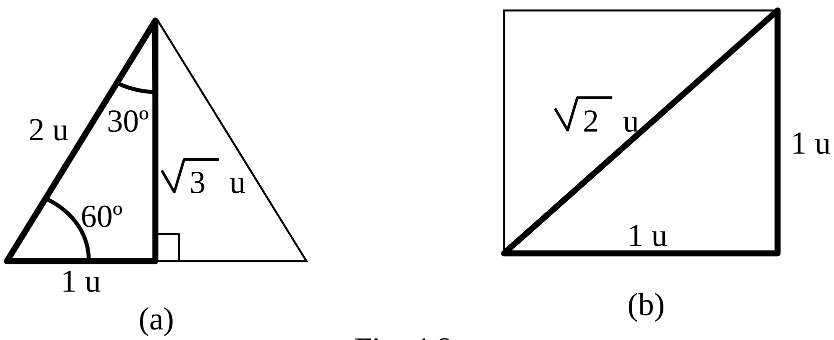



Fig. 4.8

En el caso del ángulo de 45º se dibujará un cuadrado de lado 1,0 u y al trazar la diagonal se determinan dos triángulos rectángulos e isósceles con ángulos de 45º(Fig. 4.8 b), esta medirá $\sqrt{2}$ u.

El alumno concluirá a través del cálculo los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º, obteniendo finalmente la siguiente tabla:

| | 30º | 45º | 60º |
|---|---|---|---|
| sen $\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos $\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tan $\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| cot $\alpha$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| sec $\alpha$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | 2 |
| csc $\alpha$ | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |

Se debe insistir en las relaciones entre las razones de ángulos complementarios y la acotación del seno y el coseno y de la secante y la cosecante.

En este momento el profesor debe aprovechar para destacar que los valores de las razones trigonométricas no son, en general, racionales. Esta observación es necesaria, pues por definición resultan de una división y los alumnos pueden pensar que son números racionales.

Después de conocidas las razones de los ángulos notables, se llama la atención a los alumnos sobre los ángulos que están en ambos extremos de los valores posibles para los ángulos interiores de un triángulo rectángulo: 0º y 90º.

Si los alumnos han comprendido las definiciones dadas, deben reconocer que no es posible aplicarlas a estos ángulos y se plantea el problema de ampliar la definición.

El siguiente paso consiste en colocar un triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas rectangular y llamar la atención a los alumnos sobre la expresión de las razones en términos de coordenadas. Con esta orientación los alumnos pueden particularizar el caso de 0º y 90º( seguir el L.T. página 152).

Los ejercicios del epígrafe 2 son adecuados para lograr la fijación, pero hay que añadir algunos en que aparezcan ángulos que no son notables y que, por tanto, no podrán calcular en este momento. Además, debe tenerse en cuenta ejercicios con las restantes razones (secante y cosecante) que no aparecen en el libro de texto.

<u>Uso de las tablas trigonométricas</u>

El contenido correspondiente a este punto esencial aparece en el Epígrafe 4 del Capítulo 3.

Las razones trigonométricas para los ángulos agudos ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) están calculadas en tablas con las que podemos trabajar para determinar las amplitudes de los ángulos y las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Estas aparecen en la página 161 del L.T

Como motivación para introducir el uso de la tabla , el profesor puede hacerlo utilizando un problema de cálculo en que intervenga un ángulo que no es notable; otra vía sería planteando una situación problémica que no se pueda resolver con lo estudiado hasta el momento, como por ejemplo:

Un aviador desea hallar el ancho AB de la entrada de una bahía. Los aparatos del avión le indican que va volando a una altura de 500 m. Si el avión se ubica en un punto O que se encuentra directamente sobre el punto A y el ángulo AOB mide 37,6º, ¿cuál es el ancho de la bahía?

El tratamiento del uso de la tabla puede realizarse según el procedimiento del texto. (página 161)

Los ejercicios seleccionados deben propiciar el cálculo de valores trigonométricos de ángulos notables y de la tabla para que tengan tiempo de fijarlos, y además, utilizarlo en todo el resto de la unidad.

Al introducir los valores numéricos, se hace necesario volver a destacar los procedimientos del cálculo aproximado; debe recordarse que en la escuela se pretende que los alumnos fijen una regla fundamental: *En la respuesta debe haber tantas cifras significativas como las que tiene el dato que menos cifras significativas tiene.* <u>Por lo que los cálculos intermedios deben ser con una cifra más de la que debe tener el resultado</u>.

En el cálculo trigonométrico, hay que tener en cuenta que los valores que aparecen en la tabla son aproximados y con 4 cifras significativas. Esto significa que aún cuando un ángulo se conozca con tres cifras significativas exactas, al trabajar con sus razones trigonométricas se están introduciendo valores aproximados y el resultado final puede tener como máximo 4 cifras significativas. Si, por el contrario, el ángulo es un valor aproximado, no se puede garantizar que todas las cifras de la tabla sean correctas y por tanto se debe redondear para tomar solo el número de cifras necesarias. Esto aparece ilustrado en el ejemplo 2 del texto.

El procedimiento inverso de buscar el ángulo conocida la razón se presenta mediante la solución de ecuaciones, en el texto aparecen ambos procedimientos separados por razones estructurales, pero en la clase no tiene que haber una ruptura entre ellos.

Ecuaciones trigonométricas sencillas

El contenido correspondiente a este punto esencial aparece en el Epígrafe 5 del Capítulo 3.

Como planteamos anteriormente el trabajo con las ecuaciones se introduce desde el trabajo con las tablas, por ejemplo se puede pedir resolver ecuaciones como cos x = 0,5225. Hasta este momento se incluyen ecuaciones donde interviene una sola razón trigonométrica de un ángulo dado.

En especial es importante que se reactive el concepto de ecuación, recordando las ya estudiadas por ellos, por ejemplo:

A través de preguntas podrán identificar ecuaciones y reconocer el por qué reciben ese nombre: $8x + 5 = 9$ (Ecuación lineal)

$x^2 + 4x + 4 = 0$ (Ecuación cuadrática)

$x + \frac{1}{x} = 2$ ( Ecuación fraccionaria)

$\sqrt{3x+4} = x$ (Ecuación radical)

En el análisis anterior se debe resaltar que en cada caso la ecuación ha recibido nombre según la posición que tiene la variable dentro de la ecuación, luego, ellos pueden concluir con sus palabras, cuándo una ecuación es trigonométrica: *si en una ecuación la variable es el ángulo de una razón trigonométrica, estamos en presencia de una ecuación trigonométrica.*

Además, en el ejercicio inicial el profesor debe tener en cuenta ecuaciones que no sean trigonométricas y trigonométricas que no tengan solución, como los incisos b) y c) del siguiente ejercicio:

Resuelve las ecuaciones siguientes.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $x^2 + \operatorname{sen} \pi = 1$ , c) $2\cos x - 8 = 0$

d) $\operatorname{sen} \beta = 0{,}6494$ e) $\tan x = 0{,}479$ f) $3\csc^2 x - 4 = 0$

g) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

En la resolución del inciso g) destacar que la expresión $\operatorname{sen}^2 x$, es lo mismo que $(\operatorname{sen} x)^2$, o sea, es la razón trigonométrica sen x elevada al cuadrado y aparece, además, el sen x, luego esta ecuación tiene la forma de una ecuación cuadrática y por tanto para resolverla procedemos igual que en dicha ecuación hasta encontrar el valor de la razón en cuestión.

$\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} - 1) = 0$ (descomponemos en factores, extrayendo factor común)

$\operatorname{sen} x = 0$ $\operatorname{sen} x - 1 = 0$ (igualando a cero cada factor)

$x_1 = 0^{\circ}$ $\operatorname{sen} x = 1$ ( despejando el sen x)

$x_2 = 90^{\circ}$

Tratamiento de las identidades trigonométricas.

El contenido de este punto esencial aparece en el epígrafe 3 del Capítulo 3, en él lo esencial es que los alumnos memoricen las identidades trigonométricas fundamentales, incluidas aquellas que:

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ b) $\tan\alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$ $(\alpha \neq 90º)$ c) $\cot\alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$ $(\alpha \neq 0º)$ d) $\sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90º)$ e) $\csc\alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ $(\alpha \neq 0º)$

f) $1 + tan^2\ \alpha = sec^2\ \alpha$ $(\alpha \neq 90º)$ g) $1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$ $(\alpha \neq 0º)$

Para introducir las identidades trigonométricas el profesor en una conversación de clase destacará que existen otras igualdades con variables que relacionan a las razones trigonométricas entre sí y que *se cumplen para todos los valores de la variable para los cuales las expresiones estén definidas*, estas igualdades reciben el nombre de Identidades trigonométricas, y por las numerosas aplicaciones que tienen es conveniente memorizar las fundamentales.

El teorema 1 del L.T sólo tiene tres identidades (ya que no se estudiaban las restantes), por lo que se debe presentar el siguiente Teorema y su demostración.

Teorema 1

Se cumple:

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (Identidad fundamental trigonométrica)

b) $\tan\alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90º)$ c) $\cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$ $(\alpha \neq 0º)$

d) $\sec\alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$ $(\alpha \neq 90º)$ e) $\csc\alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ $(\alpha \neq 0º)$

f) $1 + tan^2\ \alpha = sec^2\ \alpha$ $(\alpha \neq 90º)$ g) $1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$ $(\alpha \neq 0º)$

Demostración

a) En todo triángulo ABC rectángulo en C (Fig. 4.9) se tiene: $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema de Pitágoras) dividiendo toda la ecuación por $c^2$ se obtiene:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$ lo que significa que:

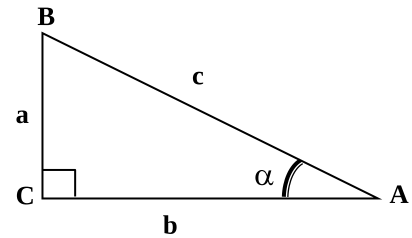


Fig. 4.9

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ para todo $0º < \alpha < 90º$

Para 0º y 90º se cumple que :

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ pues $0º + 1^2 = 1$, entonces la igualdad se cumple para todo $0º \leq \alpha \leq 90º$ .

b) En la figura 4.9 se tiene:

$$tan\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot sen\ \alpha}{c \cdot cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

si $\alpha = 0º$ ,entonces $\tan\alpha = \frac{sen\ 0º}{cos\ 0º} = \frac{0}{1} = 0$, entonces la igualdad se cumple para todo $0º \leq \alpha < 90º$ .

c) En la figura 4.9 se tiene: $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{c.\cos\alpha}{c.\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

si $\alpha = 90º$ ,entonces $\cot\alpha = \frac{\cos 90^o}{\operatorname{sen} 90^o} = \frac{0}{1} = 0$, entonces la igualdad se cumple para todo $0º < \alpha \leq 90º$ .

d) En la figura 4.9 se tiene: $\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{c}{c\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

si $\alpha = 90º$ entonces $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} 90^o} = \frac{1}{1} = 1$, entonces la igualdad se cumple para todo $0º < \alpha \leq 90º$.

e) En la figura 4.9 se tiene: $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{c}{c\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$

si $\alpha = 0º$ ,entonces $\sec\alpha = \frac{1}{\cos 0^o} = \frac{1}{1} = 1$, entonces la igualdad se cumple para todo $0º \leq \alpha < 90º$.

f) Si $\alpha \neq 90º$, $\cos\alpha \neq 0$ y se puede dividir en ambos a miembros del a) por $\cos^2\alpha$ por lo que resulta:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Luego, $$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

g) Si $\alpha \neq 0º$, $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ y se puede dividir en ambos a miembros del a) por $\operatorname{sen}^2\alpha$ por lo que resulta:

$$1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Luego,

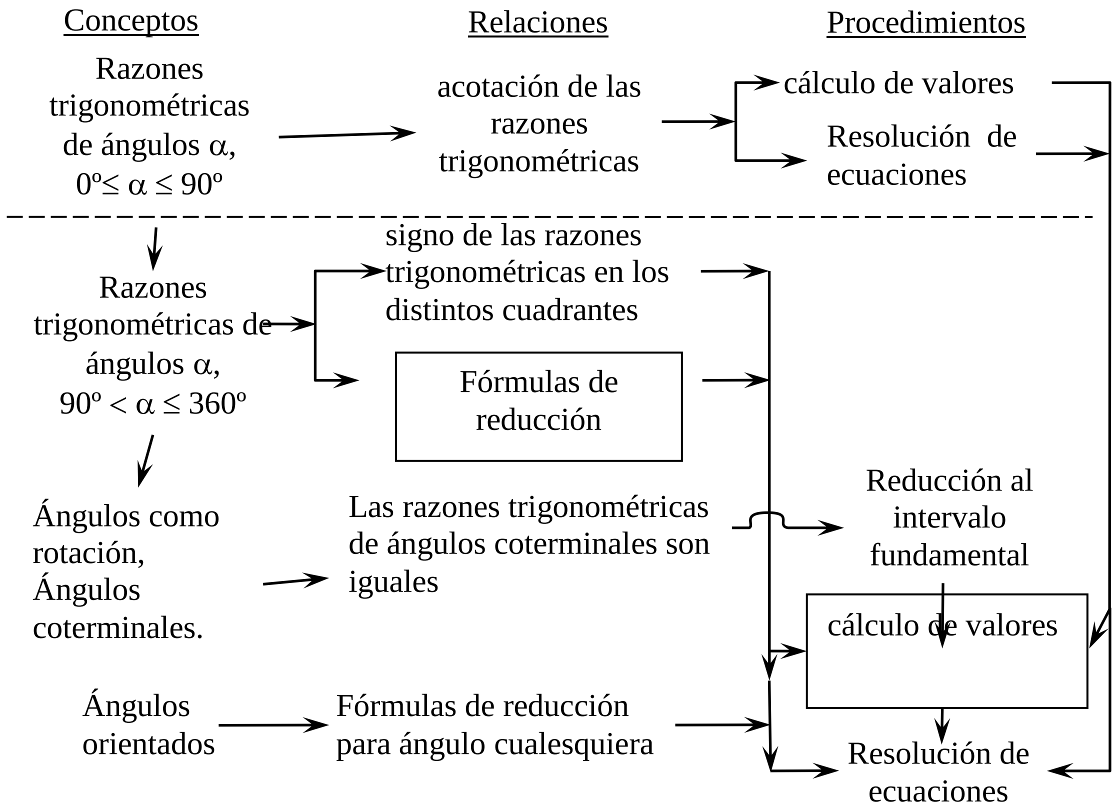
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Este teorema se deberá extender posteriormente cuando se generalice el concepto de ángulo.

### 4.2 Circunferencia trigonométrica (17 h/c)

En esta unidad temática se tratan las razones trigonométricas de ángulos entre 0º y 360º, signo de estas razones en cada cuadrante, las fórmulas de reducción, se generaliza el concepto de ángulo, los ángulos coterminales y el cálculo de las razones trigonométricas de ángulos de más de 360º. El contenido de esta subunidad temática está en los epígrafes 6, 7 y 9 del libro de texto.

En el esquema se representan la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática:




Esquema

**Razones trigonométricas de ángulos entre 0º y 360º. Fórmulas de Reducción.**

El contenido correspondiente a este punto esencial aparece en los epígrafes 6 y 7 del Libro de Texto; en él lo fundamental es que los alumnos calculen los valores de las razones trigonométricas de ángulos entre 0º y 360º. Como punto de partida el profesor puede proceder de igual forma a como lo hizo para ampliar las razones a 0º y 90º. Es importante que los alumnos comprendan la relación que existe entre esta definición y la definición inicial en el triángulo rectángulo; así podrán integrar el nuevo conocimiento y no lo verán como dos casos diferentes. Para los ángulos de 0º y 90º se mantiene lo analizado en el epígrafe 4.1.2

Para este análisis, consideremos un sistema de coordenadas con una circunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio 1 u, destacar que a esta circunferencia se le da el nombre de circunferencia trigonométrica, en la cual todo ángulo puede ser transportado (de manera única) con su vértice en el origen de coordenadas, uno de sus lados fijo en la semirrecta positiva OX (llamado lado inicial) y el otro lado (llamado lado terminal) que recorra la circunferencia en sentido antihorario (contrario a las manecillas del reloj) . (Fig. 4.11)

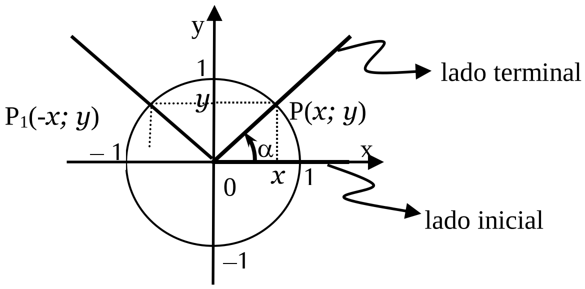



Fig. 4. 11

Así, las coordenadas (x; y) de cada punto P están determinadas de forma única por las razones trigonométricas de cada ángulo, luego, para ángulos $\alpha$ con $0º < \alpha < 90º$ ,figura 4.11, las razones trigonométricas quedan expresadas de la siguiente manera:

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen} \alpha = y$ | $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ | $\sec \alpha = \frac{1}{x}$ |
| $\cos \alpha = x$ | $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ | $\csc \alpha = \frac{1}{y}$ |

Se puede preguntar, ¿Qué sucede si el punto P está determinado por un ángulo obtuso o sobreobtuso $\theta$?

Si el punto $P_1$ determinado por el ángulo $\theta$ con $90º < \theta < 180º$ tiene coordenadas (– x; y), entonces, podemos plantear que:

$\operatorname{sen} \theta = y$ $\quad \tan \theta = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$ $\quad \sec \theta = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$

$\cos \theta = -x$ $\quad \cot \theta = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$ $\quad \csc \theta = \frac{1}{y}$

Si comparas estos resultados con los obtenidos para los ángulos entre
$0º < \alpha < 90º$ podrás concluir que:

$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \alpha$ $\quad \tan \theta = -\tan \alpha$ $\quad \sec \theta = -\sec \alpha$

$\cos \theta = -\cos \alpha$ $\quad \cot \theta = -\cot \alpha$ $\quad \csc \theta = \csc \alpha$

Destacar que esto es debido a que la circunferencia es una figura simétrica, por lo que el punto $P_1(-x;\ y)$, determinado por el ángulo de amplitud $\theta$, en el segundo cuadrante, tiene un punto simétrico $P(x;\ y)$, determinado por un ángulo de amplitud $\alpha$ en el primer cuadrante, lo cual significa que para $\theta$ existe solo un ángulo $\alpha$ tal, que los valores absolutos de sus razones trigonométricas son iguales.

Se debe hacer observar que en el segundo cuadrante, los puntos P (determinados por $\alpha$) y $P_1$ (determinados por $\theta$) son simétricos.

Entonces $\theta = 180º - \alpha$, por tanto tenemos que:

| | |
|---|---|
| $\operatorname{sen}(180º - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ | $\cos(180º - \alpha) = -\cos \alpha$ |
| $\tan(180º - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\cot(180º - \alpha) = -\cot \alpha$ |
| $\sec(180º - \alpha) = -\sec \alpha$ | $\csc(180º - \alpha) = \csc \alpha$ |

Los alumnos podrán inferir que estas relaciones nos permiten reducir el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo obtuso (IIC) a las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante y son llamadas fórmulas de reducción del segundo cuadrante.

Deben concluir que las razones trigonométricas de estos ángulos ($90º < \theta < 180º$) difieren en el signo respecto a su suplemento en el primer cuadrante, teniendo que en el segundo cuadrante: son positivas solo el seno y la cosecante y negativas las restantes razones trigonométricas.

De forma análoga se deben obtener las restantes fórmulas de reducción; así como los valores de las razones de ángulos axiales.

Una vez elaborada las fórmulas de reducción, la atención puede centrarse en:

- Acotación de los valores del seno, el coseno, la secante y la cosecante.
- Signos de las razones en los diferentes cuadrantes.
- Las identidades trigonométricas siguen siendo válidas.
- Valores de las razones en los ángulos axiales.

Si $\gamma \in [0º; 360º)$, entonces:

- $-1 \leq \text{sen}\,\gamma \leq 1$ $\tan\gamma = a$; con $a \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 90º$, $\gamma \neq 270º$
- $-1 \leq \cos\gamma \leq 1$ $\cot\gamma = \frac{1}{a}$ con $a \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0º$, $\gamma \neq 180º$
- $\sec\gamma \geq 1$ ; $\sec\gamma \leq -1$ con $\gamma \neq 90º$, $\gamma \neq 270º$
- $\csc\gamma \geq 1$ ; $\csc\gamma \leq -1$ con $\gamma \neq 0º$, $\gamma \neq 180º$

<u>Generalización del concepto de ángulo. Ángulos coterminales.</u>

El contenido correspondiente a este punto esencial aparece en los epígrafes 9 del Libro de Texto; El profesor debe hacer notar que en los estudios realizados hasta el momento se ha utilizado el concepto de ángulo como la porción del plano limitado por dos semirrectas de origen común, el cual es suficiente para el trabajo en la Geometría, donde los ángulos toman valores desde 0º a 360º, pero, en la práctica y para el trabajo en la trigonometría este concepto es insuficiente.

partir de ahora en el trabajo con la trigonometría trabajaremos con un concepto más general de ángulo.

Para esto se puede hacer reflexionar a los alumnos sobre el ángulo que describe la rueda de una bicicleta al marchar hacia adelante respecto a su amplitud y sentido (sentido antihorario) y cuando marcha hacia atrás (sentido horario). Concluir la siguiente definición.

| |
|---|
| Dado un par de semirrectas de origen común, consideramos que el ángulo está determinado por la rotación que lleva la primera semirrecta sobre la otra. (Fig.4.12 a) |

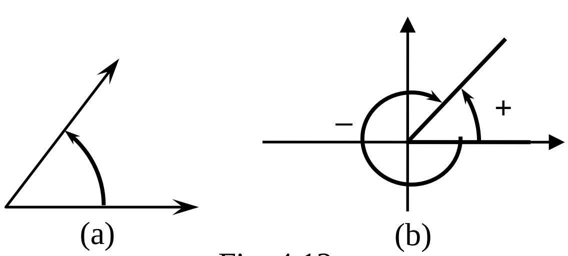


Fig. 4.12

El profesor debe realizar el siguiente análisis. Al llevar este ángulo a un sistema de coordenadas de forma tal que el vértice coincida con el origen de coordenadas y un lado coincida con el semieje positivo x (lado inicial), (Fig. 4.12b) podemos determinar para el otro lado dos sentidos de rotación, uno en sentido antihorario (contrario a las manecillas del reloj) que consideraremos positivo y otro en sentido horario (a favor de las manecillas del reloj) que consideraremos negativo. Observar que el ángulo negativo determinado por una semirrecta se puede obtener restándole 360º al ángulo positivo que esta recta determina. Esto significa que:

– 315º = 45º – 360º ; – 30º = 330º – 360º

Además, el lado final puede rotar alrededor del origen de coordenadas sin límites (Fig. 4.13) esto nos permite definir ángulo mayores de 360º.

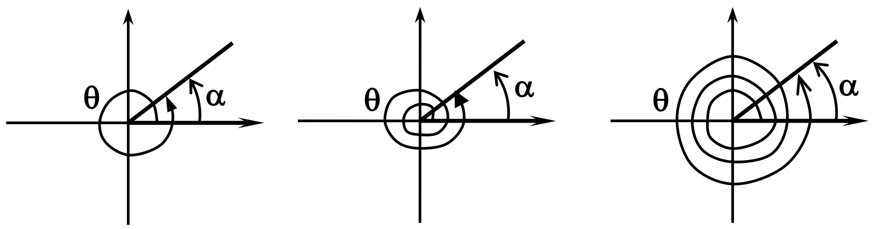



Fig. 4.13

| |
|---|
| Los ángulos determinados por una misma semirrecta se llaman coterminales y se diferencian en un múltiplo entero de 360º (Fig. 4.13). |

Después proponer ejemplos similares al siguiente:

Determina para cada uno de los siguientes ángulos un coterminal en el intervalo [0º; 360º].

a) 1860º b) 2370º c) – 2670º

Resolución:

a) Para poder determinar el ángulo coterminal a 1860º en el intervalo fundamental, debemos saber cuántas vueltas completas ha dado, luego dividimos por 360º y obtenemos: 1860º = 360º · 5 + 60º, el resto es el ángulo buscado: 60º

b) Siguiendo el procedimiento anterior tenemos: 2370º = 360º · 6 + 210º, luego el ángulo coterminal buscado es: 210º

c) Con el mismo procedimiento anterior determinamos el coterminal negativo. Dividiendo el módulo del valor dado por 360º para saber las vuelta que ha dado: 2670º = 360º · 7 + 150º, el resto, pero con signo negativo, es su coterminal negativo: – 150º, pero como queremos el coterminal positivo le sumamos 360º, por tanto: – 150º + 360º = 210º que es la amplitud del ángulo buscado.

Después de la resolución del ejemplo realizar el siguiente cuadro resumen en elaboración conjunta con los alumnos:

Determinación de las razones trigonométricas para ángulos mayores de 360º:

| |
|---|
| 1. Buscamos un ángulo del intervalo fundamental ([0º; 360º]) que sea coterminal con él.<br>2. Calculamos las razones trigonométricas de ese ángulo. |

Se debe proponer un ejemplo como el siguiente o similar para realizar el cálculo de las razones trigonométricas de ángulos mayores de ángulo 360º

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos siguientes. a) 765º b) 1475,6º c) 1200º d) – 30 º

Resolución:

a) Utilizando el procedimiento analizado en el ejemplo anterior determinamos su coterminal en el intervalo de 0º a 360º: 765º = 360º · 2 + 45º luego su coterminal en el intervalo fundamental es 45º, por tanto:

sen 765º = sen 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; tan 765º = tan 45º = 1 ; sec 765º = sec 45º = $\sqrt{2}$

cos 765º = cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; cot 765º = cot 45º = 1 ; csc 765º = csc 45º = $\sqrt{2}$

b) Al realizar la división para encontrar el coterminal se trabaja con la parte entera del cociente, es decir, 1475,6º = 360º · 4 + 35,6º, por tanto:

sen 1475,6º = sen 35,6º = 0,5821 tan 1475,6º = tan 35,6º = 0,7159
cos 1475,6º = cos 35,6º = 0,8131 cot 1475,6º = sen 35,6 = 1,379
De forma semejante se determinan las restantes.

c) Siguiendo el procedimiento del inciso a) tenemos: 1200º = 360º · 3 + 120º Como el coterminal es 120º $\in$ IIC aplicamos las fórmulas de reducción.

sen 1200º = sen 120º = sen(180º – 60º) = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

tan 1200º = tan 120º = tan(180º – 60º) = – tan 60º = $\sqrt{3}$

sec 1200º = sec 120º = sec(180º – 60º) = – sec 60º = – 2

cos 1200º = cos 120º = cos(180º – 60º) = – cos 60º = $\frac{1}{2}$

cot 1200º = cot 120º = cot(180º – 60º) = – cot 60º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

csc 1200º = csc 120º = csc(180º – 60º) = csc 60º = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) Utilizando el procedimiento indicado antes para los ángulos negativos sen(– 30º) = sen(– 30º + 360º) = sen(360º – 30º) = – sen 30º

tan(– 30º) = tan(– 30º + 360º) = tan(360º – 30º) = – tan 30º
sec(– 30º) = sec(– 30º + 360º) = sec(360º – 30º) = sec 30º
cos(– 30º) = cos(– 30º + 360º) = cos(360º – 30º) = cos 30º
cot(– 30º) = cot(– 30º + 360º) = cot(360º – 30º) = – cot 30º
csc(– 30º) = csc(– 30º + 360º) = csc(360º – 30º) = – csc 30º

Una vez resuelto el ejemplo anterior proponer el siguiente cuadro resumen

| | | |
|---|---|---|
| sen(x + 360º·k) = sen x | tan(x + 180º·k) = tan x ∗ | sec(x + 360º·k) = sec x |
| cos(x + 360º·k) = cos x | cot(x + 180º·k) = cot x ∗ | csc(x + 360º·k) = csc x |

∗Se debe analizar que para el caso de la tangente y la cotangente debido a la fórmula de reducción tan(x + 180º·k) = tan x; cot(x + 180º·k) = cot x , los valores se repiten cada media vuelta.

El profesor debe resalta que en el inciso d) del ejemplo anterior vemos que para hallar las razones trigonométricas de ángulos negativos se reduce a la de los ángulos positivos y concluir con el siguiente teorema.

| |
|---|
| Para todo ángulo $\alpha$ se cumple: |
| $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ $\quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad \sec(-\alpha) = \sec\alpha$ |
| $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ $\quad \csc(-\alpha) = -\csc\alpha$ |

Para la fijación de este teorema se debe proponer un ejemplo para el cálculo de las razones trigonométricas de ángulos negativos.

El profesor debe hacer notar que en la resolución de ecuaciones que ya habían estudiado en el intervalo de 0º a 360º se daban respuestas que podían estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes, incluyendo también los ángulos axiales por lo que el conjunto solución era finito, ahora al resolver ecuaciones el conjunto solución es infinito pues no solo van a satisfacer la ecuación los ángulos en el intervalo fundamental, sino también los infinitos ángulos coterminales con él, como se muestra en el siguiente ejemplo. El profesor deberáy realizar una selección de los ejercicios del epígrafe 19 del libro de texto.

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\cos x = -1$ b) $4\,\text{sen}^2 x - 3 = 0$

c) $2\sec^2 x = \tan^2 x + 5$ d) $3\,\text{sen}\,x \cdot \cot x = 2\,\text{sen}^2 x - 3$

Resolución:

a) $\cos x = -1$

En el intervalo fundamental ([0º; 360º]) se tiene una única solución x = 180º, pero, cada vez que se suma 360º se obtiene un ángulo coterminal, teniendo que:
$\cos 180º = \cos(180º + 360º\cdot k) = -1$
luego el conjunto solución es $S = \{180º + 360º\cdot k;\ k \in Z\}$ o $\{(1+2k)180º;\ k \in Z\}$

b) $4\,\text{sen}^2 x - 3 = 0$ (despejamos el $\text{sen}^2 x$)

$\text{sen}^2 x = \frac{3}{4}$ (aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros)

$sen\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Se obtiene por tanto las ecuaciones: $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

con las cuales tendremos soluciones en los cuatro cuadrantes (dos donde el seno es positivo y dos donde es negativo), luego, teniendo en cuenta los coterminales se tiene:

$x_1 = 60º + 360ºk\ ;\ k \in Z$ $\qquad x_3 = (180º + 60º) + 360ºk;\ k \in Z$

$\qquad = 240º + 360ºk$

$x_2 = (180º - 60º) + 360ºk;\ k \in Z$

$\qquad = 120º + 360ºk$

$x_4 = (360º - 60º) + 360ºk;\ k \in Z$

$\qquad = 300º + 360ºk$

El conjunto solución es:

$S = \{60º + 360ºk;\ 120º + 360ºk;\ 240º + 360ºk;\ 300º + 360ºk;\ k \in Z\}$

c) $2\sec^2 x = \tan^2 x + 5$ (utilizamos la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$)

$2(1 + \tan^2 x) = \tan^2 x + 5$

$2 + 2\tan^2 x = \tan^2 x + 5$ (transponemos y agrupamos términos semejantes)

$\tan^2 x = 3$

$\tan x = \pm\sqrt{3}$

$\tan x = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan x = -\sqrt{3}$

Como los valores de la tangente comienzan a repetirse después de 180º, es decir, después del segundo cuadrante, siendo el tercer cuadrante repetición del primero y el segundo del cuarto, entonces damos soluciones en los cuadrante primero y segundo.

$x_1 = 60º + 180ºk$ ; $k \in Z$ $\qquad$ $x_2 = (180º - 60º) + 180ºk$ ; $k \in Z$

$= 120º + 180ºk$

El conjunto solución es: $S = \{60º + 180ºk;\ 120º + 180ºk;\ (k \in Z)\}$

d) $3 \operatorname{sen} x \cdot \cot x = 2 \operatorname{sen}^2 x - 3$

$3 \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2(1 - \cos^2 x) - 3$

$3\cos x = 2 - 2\cos^2 x - 3$

$3\cos x = -1 - 2\cos^2 x$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$

$2\cos x + 1 = 0$ $\qquad$ $\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x = -1$

Para el caso del $\cos x = -\frac{1}{2}$ determinamos primero la amplitud del ángulo cuyo coseno es $\frac{1}{2}$ en el IC y después aplicamos las fórmulas de reducción para determinar los ángulos cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ (IIC y IIIC) en el intervalo fundamental, pero conocemos que todos los coterminales también cumplen la condición, luego las soluciones son:

$x_1 = (180º - 60º) + 360ºk$ ; $k \in Z$ $\qquad$ $x_2 = (180º + 60º) + 360ºk$ ; $k \in Z$

$= 120º + 360ºk$ $\qquad$ $= 240º + 360ºk$

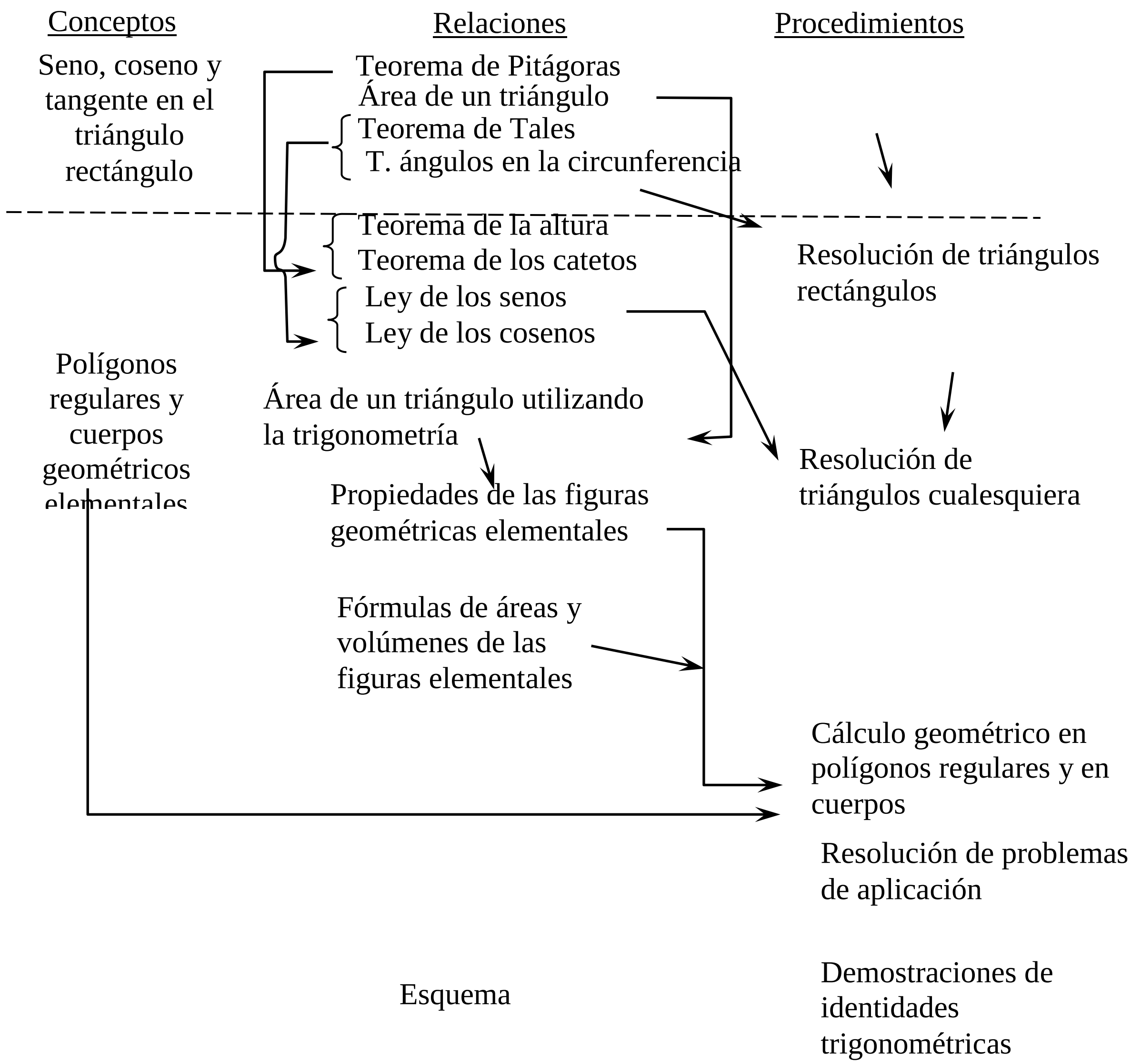
En el caso del coseno = – 1 eso se cumple para un solo valor en el intervalo fundamental, luego $x_3 = 180º + 360ºk$; $k \in Z$

El conjunto solución es:

$S = \{120º + 360ºk;\ 240º + 360ºk;\ 180º + 360ºk;\ k \in Z\}$

## 4.3 Aplicaciones de la trigonometría (23 h/c)

El contenido correspondiente a esta unidad temática aparece en el Capítulo 4 del Libro de Texto.




Esquema

Resolución de triángulos rectángulos. Problemas de aplicación.

El contenido referente a esta unidad temática se encuentra en los Epígrafes 1 y 2 del Capítulo 4 del Libro de Texto.

Lo esencial a lograr en él es que los alumnos apliquen la resolución de triángulos rectángulos a la resolución de problemas prácticos. Es conveniente antes de iniciar la unidad temática proponer un trabajo práctico con ejercicios con el objetivo de reactivar los conocimientos geométricos estudiados en la Secundaria Básica referente a:

_ Propiedades y relaciones de las figuras planas (triángulos, cuadriláteros y circunferencia),

_ Igualdad y semejanza de triángulos, y

_ Teorema de Pitágoras.

El alumno desde grados anteriores conoce el teorema de Pitágoras. Los teoremas que componen el grupo de teoremas de Pitágoras, lo estudiarán en décimo grado, como están estrictamente relacionados, es por eso que proponemos el tratamiento concentrado en los tres teoremas y sus recíprocos en las dos primeras clases.

Para la primera clase proponemos la estructura siguiente:

 Análisis de los triángulos semejantes que se forman cuando se traza la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
  Análisis de los lados homólogos de los triángulos semejantes.
  Deducción de los teoremas partiendo de las relaciones obtenidas.
Una vía metodológica puede ser.
A partir de una figura como la 4.14 y hacer a los alumnos las siguientes preguntas:

¿Cuántos triángulos aparecen en la figura?

Clasifica los triángulos formados atendiendo a sus ángulos.

Comprueba y fundamenta que los triángulos que aparecen en la figura son semejantes.

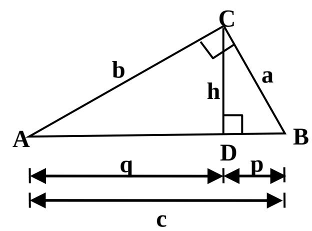


Fig. 4.14

Después de concluir que: $\Delta ADC \sim \Delta ABC \sim \Delta BCD$.se les puede pedir a los alumnos el establecer proporciones entre los lados homólogos de los triángulos, ADC y BCD; ADC y ABC; DBC y ABC quedándoles que:

Entre los triángulos ADC y BCD se cumple: $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$, o, $h^2 = p \cdot q$

Entre los triángulos ADC y ABC se cumple: $\frac{b}{c} = \frac{q}{b}$, o, $b^2 = q \cdot c$

y entre los triángulos DBC y ABC se cumple: $\frac{a}{c} = \frac{p}{a}$, o, $a^2 = p \cdot c$

Después se debe propiciar que los estudiantes con sus palabras enuncien el teorema de la altura y el de los catetos, el profesor debe destacar que junto con el Teorema de Pitágoras conforman el conocido Grupo de Teoremas de Pitágoras

Otra vía sería mediante la resolución de ejercicios donde los alumnos apliquen los conceptos y teoremas estudiados anteriormente en esta unidad, de manera que ellos se apropien de los nuevos conocimientos por una vía más activa., siendo partícipes en la elaboración de lo nuevo.
Un ejercicio a proponer puede ser:
En la figura 4.14 se conoce que:

a) a =6,0 y b = 8,0. Calcula c, p, q y h.

b) q= 2,0 cm y c = 5,0 cm . Calcula a, b, p y h.

Es importante analizar con los alumnos el procedimiento para enunciar los teoremas recíprocos de uno dado y en elaboración conjunta, enunciar los teoremas recíprocos de los teoremas de la altura y de los catetos.

Los alumnos han calculado elementos de un triángulo rectángulo, pero desconocen qué se entiende por resolver un triángulo. Es recomendable entonces precisar qué se entiende por “resolver un triángulo”. Una vía metodológica a seguir puede ser la siguiente: Dibujar un triángulo en la pizarra y preguntar ¿cuáles son sus elementos?.

El profesor podrá precisar que por elementos de un triángulo se entienden sus tres lados y sus tres ángulos (6 en total) y que un triángulo se considera “resuelto” “al conocer sus 6 elementos, concluyendo que por resolver un triángulo se entiende calcular los elementos desconocidos cuando se conocen algunos de ellos.

También es necesario precisar cuántos elementos, como mínimo, se deben conocer para resolver un triángulo y cuáles son. Se sugiere apoyarse para ello en los criterios de igualdad de triángulos y concluir que un triángulo está unívocamente determinado (existe y es único) si de él se conocen:

- Sus tres lados.
- Dos lados y el ángulo comprendido.
- Un lado y sus dos ángulos adyacentes.

Se puede llamar la atención al hecho de que en los tres casos se conocen tres elementos y entre ellos siempre se encuentra, al menos, un lado.

Para que los alumnos comprendan por qué siempre es necesario conocer un lado; se les puede mostrar varios triángulos semejantes entre sí como la fig 4.1 del texto, de la cual pueden ellos mismos concluir que si se conocen solo los tres ángulos de un triángulo, este no está unívocamente determinado ya que todos los triángulos semejantes entre sí tienen sus 3 ángulos respectivamente iguales.

De todo el análisis anterior el alumno debe concluir que para resolver un triángulo es necesario conocer 3 elementos y que uno de ellos, al menos, debe ser un lado. El profesor debe precisar que esto no basta ya que los tres elementos, aunque uno de ellos sea un lado, deben estar relacionados entre sí de la misma forma que algunos de los criterios de igualdad de triángulos, pues es posible tener 3 elementos, un lado entre ellos y que el triángulo no exista o no sea único.

Después de hecho este análisis, se sugiere precisar que en este momento se tratará el triángulo rectángulo y que en este caso específico, como siempre se conoce un ángulo (el recto) basta con conocer dos elementos (uno de los cuales ha de ser un lado.

Puede el alumno concluir que:

La resolución de triángulos rectángulos comprende cuatro casos distintos:

- conocido un ángulo agudo y la hipotenusa,
- conocido un ángulo agudo y un cateto,
- conocido un cateto y la hipotenusa, o
- conocidos los dos catetos.

Destacar que para resolver un triángulo rectángulo deben tenerse en cuenta los siguientes principios:

1. Dibujar un triángulo rectángulo señalando los elementos conocidos.
2. Cuando se conoce un ángulo agudo, se puede hallar el otro restándolo de 90º ya que son ángulos complementarios.
3. Para hallar un elemento desconocido se escoge una relación que contenga a dicho elemento y los datos conocidos, ya que los elementos calculados están afectados por la inexactitud de la última cifra de las razones trigonométricas y de este modo no se incrementa más el error.

Esta relación escogida puede ser una razón trigonométrica o uno de los teoremas del grupo de teoremas de Pitágoras.

Se propondrán ejercicios del epígrafe 1 y 2 (Problemas) del Libro de Texto u otros creados por el profesor. Entre los problemas que se planteen no deben faltar algunos como el Ejemplo 3 en los que se utilicen las expresiones de ángulo de elevación o de depresión como datos, ya que estos casos se dan mucho en la práctica. Antes de plantear problemas de este tipo es conveniente aclarar a los alumnos el significado de las expresiones “ángulo de elevación”, “ángulo de depresión”, “visual”; para ello pueden utilizar la figura 4.8 del texto.

<u>Cálculo de áreas utilizando la trigonometría</u>

Este punto esencial se pueden disponer de hasta 2 clases. El contenido referente a este punto esencial se encuentra en el epígrafe 5 del Capítulo 4 del libro de texto.

Se introduce una nueva expresión para calcular el área de un triángulo, que por su utilidad posterior es necesario que los alumnos se apropien de ella pues permite calcular el área de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido. La demostración puede hacerse como en el libro de texto y para su fijación pueden hacerse ejercicios como el Ejemplo 1 y los ejercicios 1 y 2 del propio epígrafe.

Se debe propiciar que los alumnos obtengan la fórmula para calcular el área del triángulo equilátero, el paralelogramo y el rombo, como se muestra a continuación.

En el caso del triángulo equilátero como sus ángulos tienen una amplitud de 60º y todos sus lados son iguales, entonces, el área sería:

$A = \frac{1}{2}\, a \cdot a \operatorname{sen} 60^{\circ}$ (a: lado del triángulo)

$$A = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

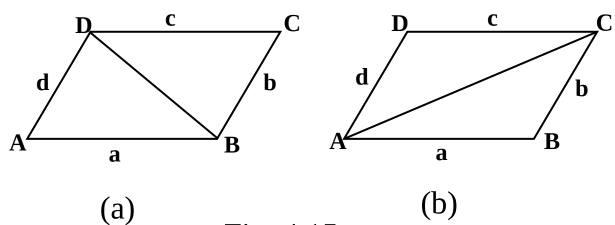



Fig. 4.15

Área del paralelogramo ($A = b \cdot h$)

En todo paralelogramo al trazar una de sus diagonales se descompone en dos triángulos acutángulos iguales (Fig.4.15 a) o en dos triángulos oblicuángulos iguales (Fig. 4.15 b).

En la figura 4.15 a se cumple: $A_{ABCD} = 2\, A_{\Delta ABD}$

$$A_{ABCD} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot d \operatorname{sen} \alpha\right)$$

$$(0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ})$$

$$A_{ABCD} = a \cdot d \operatorname{sen} \alpha \quad (1)$$

En la figura 4.15 b se cumple:

$$A_{ABCD} = 2\, A_{\Delta ABC}$$

$$A_{ABCD} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot b \operatorname{sen} \beta\right) \quad (90^{\circ} < \beta < 180^{\circ})$$

$$A_{ABCD} = a \cdot b \operatorname{sen} \beta \quad (2)$$

pero $b = d$ y $\beta = 180^{\circ} - \alpha$, luego sustituyendo en (2) obtenemos:

$$A_{ABCD} = a \cdot d \operatorname{sen} (180^{\circ} - \alpha)$$

$$A_{ABCD} = a \cdot d \operatorname{sen} \alpha$$

que es la expresión (1), por lo que podemos concluir:

El área de un paralelogramo es igual al producto de dos lados consecutivos por el seno del ángulo formado por esos lados

**Este teorema se ha deducido, luego su demostración es precisamente lo que ha permitido arribar a la formulación del teorema.**

En el caso del rombo, como es un paralelogramos con sus cuatro lados iguales, se tiene: $A = a^2 \text{sen}\, \alpha \quad (0º < \alpha < 180º)$

Ley de los senos y de los cosenos

Para este punto esencial se pueden disponer de hasta 10 clases. El contenido referente a este punto esencial se encuentra en los epígrafes 3 y 4 páginas 255 y 260 del libro de texto.

Lo fundamental que el alumno debe dominar en este punto esencial son las relaciones de las Leyes de los senos y los cosenos y las apliquen a la resolución de triángulos cualesquiera, tanto para el cálculo de la longitud de lados como para la determinación de la amplitud de ángulos, y la resolución de problemas de la práctica.

Para el logro de estos objetivos (Ley de los senos) se sugiere plantear un ejercicio donde el estudiante tenga que resolver un triángulo cualquiera, pero que con los conocimientos que posee no puede dar respuesta a esta situación, es decir, se dé un lado y dos ángulos (uno de ellos opuesto al lado dado) o un lado y los ángulos adyacentes a ese lado, por ejemplo:

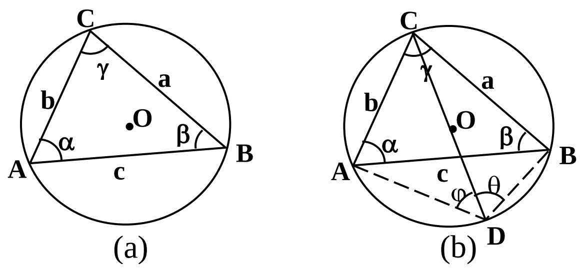
En el triángulo ABC se conoce: a = 10cm, $\alpha$ = 60º y $\gamma$ = 45º. Calcula los restantes elementos del triángulo.

En este momento se debe plantear a los alumnos que con los conocimientos que poseen no pueden resolver el triángulo, luego es necesario buscar otras relaciones que nos permitan este trabajo.

Una posible vía es plantear el Teorema y demostrarlo o analizar con los alumnos que como todo triángulo es inscribible en una circunferencia, se puede tratar de encontrar el radio de esta, cuyo centro es el circuncentro del triángulo.

En este caso se debe empezar analizando el triángulo rectángulo, pues aplicando el Teorema de Tales se puede determinar que el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa, pues el ángulo inscrito en el diámetro es de 90º y por tanto el triángulo determinado por este ángulo y el diámetro es rectángulo cuya hipotenusa sería el diámetro de la circunferencia circunscrita.

Seguidamente plantear ¿cómo poder determinar esta circunferencia en el caso de un triángulo acutángulo u obtusángulo? En la figura 4.16 a, tenemos inscrito en una circunferencia de centro O un triángulo ABC acutángulo. Tracemos un diámetro que tenga uno de sus extremos en un vértice del triángulo (Fig. 4.16b), sea este $\overline{CD}$ y la cuerda $\overline{DB}$ o $\overline{AD}$, determinando los ángulos $\theta$ o $\varphi$ y los triángulos CDB o ADC, rectángulos en B y A respectivamente.



(a) (b)

Fig. 4. 16

En el $\Delta$ CDB tenemos: sen $\theta = \frac{a}{\overline{CD}}$ despejando $\overline{CD}$ obtenemos $\overline{CD} = \frac{a}{sen\,\theta}$ (1)

pero $\theta = \alpha$ por ser ángulos inscritos en el mismo arco ($\overline{BC}$) y $\overline{CD}$ = 2R por ser R el radio de la circunferencia circunscrita, luego, sustituyendo en (1) tenemos:

$2R = \frac{a}{sen\,\alpha}$

Haciendo este mismo análisis con el triángulo CAD encontramos que:

$2R = \frac{b}{sen\,\beta}$

Si tomamos otro diámetro que tenga por extremo el vértice A o el B encontraremos que $2R = \frac{c}{sen\,\gamma}$ , luego podremos concluir que:

$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} = 2R$

En el caso del triángulo obtusángulo con relación a los ángulos agudos obtendríamos los mismos resultados, debemos analizar si sucede lo mismo con respecto al ángulo obtuso.

Sea la figura 4.17 donde el triángulo ABC es obtusángulo, en este caso al trazar el diámetro CD, se obtiene el $\Delta$CBD rectángulo en B, en el cual se tiene que:

$$\overline{CD} = \frac{a}{sen\,\theta}$$

pero, $\alpha$ y $\theta$ son ángulos inscritos en arcos que suman 360º por tanto $\alpha + \theta$ = 180º, luego,

$$2R = \frac{a}{sen\,(180^{o} - \alpha)}$$

$$2R = \frac{a}{sen\,\alpha}$$

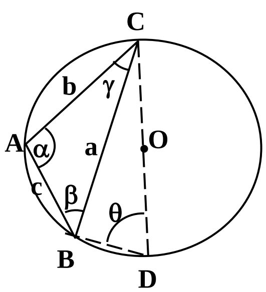



Fig. 4.17

obteniendo así que esta relación también se cumple en el caso del triángulo obtusángulo y es conocida como Ley de los senos. Enunciar el Teorema 1, pág 255 del libro de texto.

En este momento es importante analizar con el estudiante que este teorema consta de dos partes, una se refiere a que “la razón entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto a ese lado es constante” y la segunda parte, que esa constante es “igual al duplo del radio de la circunferencia circunscrita” esta situación debe quedar bien clara en los alumnos porque ambas partes se pueden aplicar indistintamente.

Una vez de haber obtenido la Ley de los senos o demostrado el teorema correspondiente se debe retomar el ejercicio planteado al inicio y resolverlo.

Es importante también hacer ejercicios formales de resolución de triángulos donde se aplique la Ley de los senos como el Ejemplo 1 del epígrafe 3, página 256 del libro de texto.

Al tratar esta Ley se deben resolver ejercicios como los ejemplos 2, 3 y 4 página 257 y 259 del libro de texto donde los elementos que se conocen son dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Como este caso no corresponde a ninguno de los criterios de igualdad de triángulos con estos ejemplos se muestra que pueden existir dos soluciones (Ejemplo 2 pág. 257), ninguna solución (Ejemplo 3 pág. 258) o una solución (Ejemplo 4 pág 259); después de haber resuelto estos ejemplos con los alumnos se debe realizar el siguiente análisis:

Al analizar la expresión sen $\gamma = \frac{c \cdot \text{sen}\beta}{\text{b}}$ verás que:

- Si c · sen $\beta >$ b entonces sen $\gamma > 1$ por lo que no existe ningún ángulo que cumpla esa condición, por tanto no existe un triángulo con las condiciones dadas.
- Si c · sen $\beta <$ b entonces $0 <$ sen $\gamma < 1$ luego existen soluciones en el IC y IIC entonces existen dos soluciones, por lo que existen dos triángulos que cumplen con las condiciones iniciales.

Concluyendo que en el caso de conocer dos lados y el ángulo que se oponen al mayor de estos lados como la solución es única queda determinado unívocamente el triángulo y enunciar los teoremas 2 y 3 páginas 258-259.

Para ejercitar la Ley de los senos se pueden proponer los ejercicios 1 y 2 del Epígrafe 3 del libro de texto.

Para el caso de la Ley de los cosenos plantear el teorema, página 260 del libro de texto y demostrarlo, lo cual puede realizarse siguiendo el texto.

Una vez demostrado este teorema para un lado debe mostrarse cómo queda expresado para los otros dos lados y también debe mostrarse que puede utilizarse para el cálculo de la amplitud de ángulos en el triángulo, conocido los tres lados despejando en la relación.

Se deben analizar los Ejemplos 1 y 2, páginas 261 y 262, para mostrar en qué casos se aplica esta ley. El Ejemplo 2 aparece resuelto en el texto aplicando la ley de los cosenos para hallar los dos primeros ángulos. También puede resolverse, una vez obtenido el primer ángulo por la Ley de los cosenos, calculando el segundo por la Ley de los senos; de seguir esta vía es conveniente comenzar por hallar el mayor de los ángulos (el opuesto al mayor lado), pues la Ley de los cosenos no discriminará si el triángulo es obtusángulo o no.

Para ejercitar la Ley de los cosenos se deben realizar ejercicios formales de resolución de triángulos como los del ejercicio 1 del propio epígrafe 4.

Una vez que los alumnos hayan fijado las leyes de los senos y los cosenos con ejercicios formales se deben hacer problemas de aplicación como el Ejemplo 3 del epígrafe 4, página 262, ya que lo fundamental en este punto esencial no son las leyes en sí, sino la aplicación de estas. Estos problemas pueden ser escogidos entre los ejercicios del 2 al 9 del Epígrafe 4, los ejercicios 5, 7 y 9 del Capítulo u otro que el profesor pueda crear.

<u>Cálculo en polígonos regulares y cuerpos.</u>

Para este punto esencial se dispone de hasta 8 horas clase cuyo contenido se encuentra en los epígrafes 6 y 7 del Capítulo 4 del texto.

Lo esencial a lograr en este punto es que los alumnos apliquen sus conocimientos trigonométricos y geométricos al cálculo en polígonos regulares y en cuerpos.

La unidad comienza con el cálculo en polígonos regulares. Su tratamiento puede hacerse mediante ejercicios recordando previamente a los alumnos que un polígono regular es aquel que posee todos sus lados, así como sus ángulos iguales y precisando cuáles son sus elementos.

Por elementos de un polígono regular entendemos:

número de lados, longitud de un lado, radio de la circunferencia circunscrita y apotema (radio de la circunferencia inscrita). Es conveniente también hacer referencia al significado de los prefijos: exa, deca, octo, …, etc. para que los alumnos interpreten con facilidad los términos exágono, decágono, etc.

Debe quedar bien claro que conocido el número de lados de un polígono regular y orto elemento cualquiera, es posible siempre hallar los restantes, así como su área y que el cálculo de un polígono regular se reduce al cálculo en un triángulo isósceles y por ende al de un triángulo rectángulo. Esto último puede mostrarse fácilmente con solo trazar los radios de la circunferencia circunscrita al polígono regular y mostrando que este se descompone en tantos triángulos isósceles como lados tiene el polígono y que todos son iguales entre sí, por lo que basta trabajar en uno de ellos para calcular cualquier elemento.

Después de hecho este recordatorio puede proponerse el Ejemplo 1 del epígrafe 6, donde conocido el lado de un decágono regular se pide calcular otros elementos.

Estas figuras son muy importantes en matemática y tendrán mucha aplicación en el epígrafe que sigue por lo que se debe procurar que los alumnos fijen todo lo concerniente a ellas.

Aunque el área de un polígono regular puede calcularse por suma de áreas de triángulos, en el libro de texto se demuestra una fórmula para calcularlas en función del semiperímetro y la apotema del polígono que simplifica mucho este cálculo por lo que sugerimos que se demuestre a los alumnos y que estos la memoricen para su uso posterior. La demostración es muy simple ya que se hace por suma de áreas.
Para la ejercitación de estos contenidos pueden seleccionarse ejercicios entre el 1 y el 6 del epígrafe 6.

Otro tema importante a tratar en este punto esencial es el cálculo de cuerpos. La vía metodológica a seguir para su tratamiento sugerimos que sea la misma que en el tema anterior, es decir, proponer ejercicios a los alumnos comenzando con ejemplos muy sencillos e ir aumentando poco a poco las dificultades.

El cálculo de cuerpos se comienza a tratar en Secundaria Básica, en décimo grado se profundiza en esto y se pueden resolver otros tipos de ejercicios pues los alumnos poseen otras herramienta para ello, pero recordemos que en este grado el cálculo de cuerpos aparece como una aplicación de la trigonometría por lo que los ejercicios que se propongan a los alumnos deben requerir de ella para resolverlos.

Para comenzar sería conveniente proponer un ejercicio cuya resolución sea inmediata como el ejemplo 1 del epígrafe 7 del texto. Después de analizado este ejemplo pueden proponerse ejercicios como el 1 del epígrafe 7 del texto donde se pide calcular el volumen de dos prismas rectos de los cuales no se tienen todos los datos para hallarlo.

En el inciso a), por ejemplo, se necesita hallar el área de la base y la altura del prisma, este es de base rectangular por lo que es necesario conocer los dos lados del rectángulo para hallar su área y solo conocemos uno.

El alumno puede ser guiado a reconocer que necesita este dato y cómo puede hallarlo aplicando el Teorema de Pitágoras ya que conocen un cateto (un lado) y la hipotenusa (la diagonal del rectángulo). También deben hallar la altura pues no aparece como dato y para ello deben aplicar la trigonometría para calcular el cateto $\overline{HD}$ (altura del prisma) en el triángulo rectángulo HDB del cual conocen otro cateto y un ángulo agudo.

Se sugiere, después, proponer ejercicios donde se pida calcular, además del volumen, el área total o lateral del cuerpo como el Ejemplo 3 del epígrafe 7 y ejercicios donde se pida calcular el volumen o área total de cuerpos compuestos como el Ejemplo 2 del propio epígrafe.

Para ejercitar este contenido se pueden escoger ejercicios como el 1, 2, 4, 6 y 8 del Epígrafe 7 del libro de texto. Para los más aventajados se pueden proponer ejercicios como el 3, 5 y 7.

En el epígrafe 11 del libro de texto aparecen ejercicios de aplicación a la Física y la Astronomía, que no se deben dejar de hacer.

Otros ejercicios de aplicación a la geometría y la Física pueden ser:

El logro de estas exigencias se materializa en la práctica cuando los alumnos son capaces de resolver ejercicios como los siguientes:

1. Si sen $\alpha$ = , calcula las restantes razones trigonométricas de $\alpha$.
2. Si $\Delta$ ABC es rectángulo en C, cos $\alpha$ = y el cateto a = 3,0u , calcula las longitudes del cateto b y la hipotenusa c.
3. a) Si cos $\alpha$ = y sen $\alpha < 0$ calcula las restantes razones trigonométricas de $\alpha$.

   b) Si tan $\alpha$ = -1,5 y $\alpha \in$ IIC, calcula las restantes razones trigonométricas de $\alpha$

   c) Si sec $\alpha$ = 2 y $\alpha \in$ IVC, calcula las restantes razones trigonométricas de $\alpha$.
4. Calcula:

a) $\dfrac{sen\ 30^0 + \cos 45^0 \cdot \tan 60^0}{\cos 30^0 - sen\ 0^0 \cdot \tan 30^0}$  b) $\dfrac{\sec\ 0^0 : \tan 45^0 \cdot \sqrt{\dfrac{sen^2\, 90^2}{sen^2\, 90^2 - \tan 0^0 \cdot \csc 45^0}}}{\tan 60^0}$

c) $\dfrac{sen\ 35{,}2^0 - \cos 136{,}4^0 \cdot \tan 343^0}{\tan(-31{,}7^0) - sen\ 618^0}$  d) $\dfrac{\cos(-150^0) + sen\ 215^0 - \tan 418{,}3^0 \cdot \cos 765^0}{\frac{3}{2}\csc 60^0 + \cot 30^0}$

5. a) Una fuerza de 20,0N forma un ángulo de $30{,}0^0$ con la horizontal. Calcula sus componentes.

   b) Las componentes horizontal y vertical de una fuerza son 35N y 17N respectivamente. ¿Cuál es la intensidad de la fuerza y qué ángulo forma con la horizontal?
6. La base de una pieza de madera tiene forma de rombo y su perímetro es de 40 cm. Si la longitud de la diagonal menor es de 12 cm, calcula la amplitud de los ángulos del rombo.
7. Simplifica las expresiones siguientes:

   a) cos t + tan t . sen t ($t \neq 90º$)  b) $\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\tan^2 x}$ ($x \neq 90º$)

   c) $\dfrac{sen^2\,\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{sen^2\,\alpha}{1-\cos\alpha}$ ($\alpha \neq 0º$)
8. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) 6 sen x = 3  b) cos $\alpha$ = - 0,8059  c) sen x = 0,6089

d) tan $\theta$ = 4,75  e) $\sec^2 \theta = \frac{4}{3}$  e) $\cot^2 x = 3$

9. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) 2sen x + $\cos^2 x = 0$ b) cos x · tan x = cos x

c) 2sen x · cos x - cos x = 0 d) sec x - cos x = 0

10. Demuestra las igualdades siguientes para los valores admisibles de la variable.

a) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x + 1 = 2\cos^2 x$ b) $\operatorname{sen}^2\beta + \tan^2\beta = \sec^2\beta - \cos^2\beta$

c) $\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\sec^2\alpha} = \cos^4\alpha$ d) $\sec y = \frac{\cot y + \tan y}{\csc y}$

11. Una escalera de 5,2 m de longitud está apoyada en una pared de modo que su pie dista 2,0 m de la pared. ¿A qué distancia de la base se apoya la escalera a la pared?

12. En un $\Delta MPN$, rectángulo en $P$, la altura relativa a la hipotenusa mide 8,0 cm.

a) ¿Qué longitudes enteras pueden tener los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa?

b) ¿Qué longitudes tienen los segmentos de hipotenusa si la razón entre ellos es de 1:4?

c) Halla la amplitud del ángulo que forma la hipotenusa con el cateto mayor.

13. En el $\Delta ABC$, rectángulo en C e isósceles de base $\overline{AB}$; la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es = = 6,0 cm. Calcula las longitudes de sus tres lados.

14. Resuelve el triángulo ABC, si se sabe que:

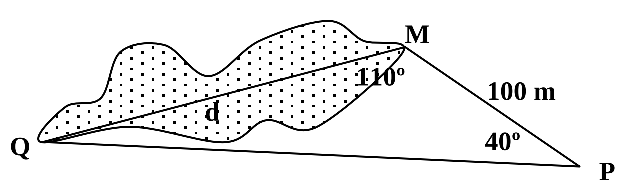
a) a = 41,2 u ; b = 28 u ; $\gamma$ = 58,2º

b) $\alpha$= 53,1º ; b = 1,98 u ; $\gamma$ = 22,3º

c) c = 9,1 u ; b = 16 u ; a = 5,3 u

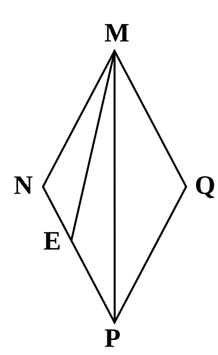
15. Dos trenes parten al mismo tiempo de una misma estación siguiendo vías rectilíneas que forman entre sí un ángulo de $30^0$. Uno de los trenes se mueve con una velocidad de 30 km/h y el otro a 40 km/h ¿A qué distancia se encuentran los trenes al cabo de media hora?

16. Para calcular la distancia entre dos puntos a la orilla de un lago, se establece un punto P a 100 m de un punto M; al medir los ángulos resulta que $\angle M = 110^0$ y $\angle P = 40^0$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos M y Q ?



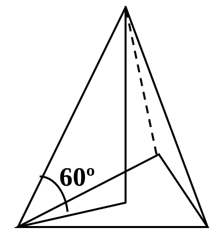

17. El rombo MNPQ tiene 6,0 cm de lado, $\angle P = 60^0$,

E: punto medio de NP. Calcula ME, MP y $\angle$ EMP

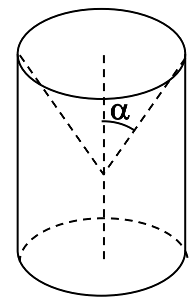


18. El lado de un exágono regular es igual a 12 cm, halla su área y el radio de la circunferencia circunscrita el mismo.

19. Halla el volumen de la pirámide triangular regular que se muestra en la figura.




20. La figura representa un cilindro circular recto al cual se le ha realizado una perforación en forma de cono cuya altura es la mitad de la del cilindro. Si $\alpha$ = 60º y la altura del cilindro es 8,4 cm, halla el volumen del cuerpo representado.




21. En un cono circular recto dos generatrices opuestas forman un ángulo de 50º. Si las generatrices miden 15,5 dm, calcula el volumen del cono.
a) ¿Serán suficientes 5L de pintura de aceite para pintar dos veces totalmente el cono, si con un litro se pueden pintar dos metros cuadrados de superficie?

22. En la pirámide regular de base cuadrada ABCDS que se muestra en la figura ____ se cumple que:
● la diagonal de la base $\overline{AC}$ = 8,0 cm,
● tan $\alpha$ = 2 ($\alpha$: ángulo de inclinación de las aristas laterales).
Calcula:
a) El volumen de la pirámide.
b) Su área lateral.

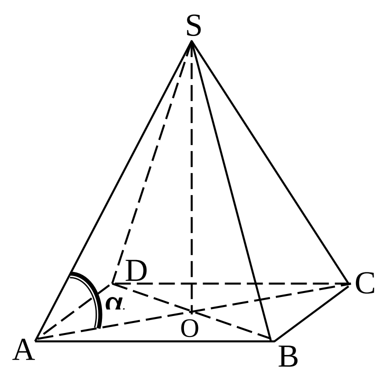


Fig.

23. El lobby de un edificio tiene forma pentagonal ABCDE como muestra la figura ____, y en el cual se cumple:
- $\overline{AB} \perp \overline{AE}$, $\overline{ED} \perp \overline{AE}$;
- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$,
- $\angle$BCD = 120º; $\overline{AB}$ = 5,0 m.
Calcula su área y perímetro.

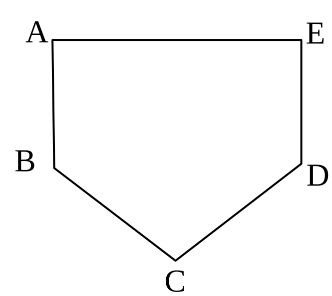


Fig.

**UNIDAD 5 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA (14 h/c)**
**INTRODUCCIÓN**

La unidad ofrece la oportunidad de continuar sistematizando el trabajo con conjuntos numéricos, ecuaciones y funciones, así como lo aprendido desde primaria y secundaria sobre el procesamiento de datos simples y agrupados. A través de su estudio se harán precisiones sobre los principales conceptos, relaciones y procedimientos que en ella se introducen, con algunos de los cuales se ha trabajado implícitamente.

En la planificación de los sistemas de clases debe tenerse en cuenta una visión integradora de la actividad para el procesamiento de datos, en que se revele la realización del sistema de acciones y operaciones que se realizan al hacer: el **análisis de la situación de partida o inicial** que es objeto de estudio, la que se caracteriza por la realización de reflexiones, desde diferentes puntos de vista, de la información que aporta la situación o problemática, y en que se ejecutan acciones para identificar, analizar y validar los datos que se requieren para realizar el estudio o resolver un problema; la **obtención de los datos,** que abarca la planeación y ejecución del proceso de búsqueda de los datos necesarios, que facilita la realización del estudio sobre un determinado hecho o fenómeno, y en que se ejecutan las acciones de planificar, seleccionar, localizar, recopilar, clasificar y registrar los datos obtenidos; la **simplificación de datos,** que se caracteriza por someter a procesos de transformación los datos que se tienen (cuantitativos o cualitativos), así como los resultados de las mediciones realizadas, en que se ejecutan acciones para organizar, tabular, cuantificar, calcular y representar en tablas y gráficos o por medio de medidas representativas los datos recopilados y la **comunicación de los resultados obtenidos,** que se caracteriza por la expresión, en forma oral o escrita, de la información que proporcionan los datos en un estadio que posibilite el proceso de comunicación como resultado final del proceso, con la aplicación de los principios de análisis y síntesis en que se ejecutan acciones para describir, comparar, interpretar, argumentar, fundamentar y valorar los resultados obtenidos.

**Objetivos de la unidad**

Los estudiantes deben ser capaces de:

- Reconocer el objeto y las tareas de la Estadística Descriptiva y su importancia para la sociedad.
- Identificar los tipos de escala en que se pueden cuantificar los fenómenos y procesos de la realidad objetiva que se estudian y los recursos de la Estadística Descriptiva que se pueden utilizar en correspondencia con el tipo de escala.
- Describir datos por medio de tablas, gráficos y algunas características numéricas (medidas de tendencia central y medidas de dispersión) como herramientas útiles para analizar tendencias y poder hacer valoraciones sobre hechos y fenómenos de la vida económica, política y social de Cuba y el mundo, haciendo uso de las facilidades de una hoja electrónica de cálculo.

## ESTRUCTURA INTERNA DE LA UNIDAD 5

ESTADÍSTICA

- Importancia del procesamiento de datos

Conceptos básicos

- Población, muestra, variable, tipos de variables.
- Escala de medición de las variables
- Datos simples y datos agrupados.

Descripción de datos simples y agrupados mediante tablas, gráficos y medidas de tendencia central

Medidas de dispersión para datos simples y agrupados

De esta estructura se derivan las siguientes unidades temáticas:

- La importancia del trabajo con datos para la sociedad/Escalas
- Representación de datos simples y agrupados mediante tablas, gráficos y medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión para datos simples y agrupados

| Sub. unidad | Contenidos | 14h/c |
|---|---|---|
| 5.1 | La importancia del trabajo con datos para la sociedad. Repaso de: Población y muestra. Objeto de la estadística y en particular, de la estadística descriptiva. Variables. Variables cualitativas y cuantitativas. Variables discretas y continuas. Escalas: nominal, ordinal, de intervalos y de proporciones. | 3 |
| 5.2 | Repaso de: Distribuciones empíricas de frecuencias. Representación de datos simples y agrupados mediante tablas de frecuencia absoluta, frecuencia relativa, frecuencia relativa porcentual, frecuencia absoluta acumulada, frecuencia relativa acumulada. Representación de datos simples y agrupados mediante gráficos (pictogramas, de barras, de pastel para datos cualitativos; histogramas y polígonos de frecuencia de frecuencia absoluta, de frecuencia relativa). Medidas de tendencia central para datos simples. Media aritmética para datos agrupados. Clase mediana y clase (es) modal (es) para datos agrupados. Ventajas y limitaciones de estas medidas.<br>Tablas de frecuencias absolutas acumuladas y de frecuencias relativas acumuladas para datos cuantitativos. Histograma y polígonos de frecuencias absolutas acumuladas y de frecuencias relativas acumuladas para datos cuantitativos. | 6 |
| 5.3 | Medidas de dispersión para datos simples y agrupados. Recorrido, amplitud o rango. Desviación media. Varianza. Desviación típica o estándar. Coeficiente de variación de Pearson. Ventajas y limitaciones de estas medidas. | 5 |

**Bibliografía básica para el desarrollo de la unidad**

Rodríguez, F. y otros: Manual de Introducción a la Estadística Descriptiva. Ed. Pueblo y educación, 2007.

Para el tratamiento de la unidad es esencial que los estudiantes logren:

- Analizar la situación de partida para precisar interrogantes y determinar la variable que se va a estudiar y los datos que se requieren.
- Caracterizar el tipo de la variable que se quiere estudiar e identificar la escala en que se puede cuantificar.
- Identificar de acuerdo con el tipo de variable y escala cuáles son los procedimientos estadísticos que se pueden aplicar en el estudio de una situación dada.
- Planificar, seleccionar, localizar, recopilar, clasificar y registrar los datos obtenidos.
- Organizar y representar en tablas y gráficos o por medio de medidas representativas los datos recopilados.
- Interpretar, fundamentar y valorar los resultados obtenidos.
- Utilizar los recursos informáticos para la búsqueda de información o para hacer uso de las facilidades de una hoja electrónica de cálculo.

Se sugiere orientar una tarea evaluativa en la primera clase de la unidad, con el objetivo de que los estudiantes logren reconocer la utilidad de la estadística en la vida cotidiana, en diversas ramas de la economía y las ciencias, por medio de la aplicación de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva. A partir de una situación problemática dada, los estudiantes deberán: determinar cuál es la variable a estudiar, su tipo y la escala en que se puede cuantificar, establecer cuáles son los datos que se requieren, elaborar pequeñas encuestas para obtenerlos, someter estos datos a procesos de transformación y finalmente, comunicar la información obtenida tras realizar acciones de descripción, comparación, interpretación, fundamentación y valoración.

**5,1 La importancia del trabajo con datos para la sociedad/Escalas**

Para el tratamiento de este punto esencial se sugieren 3 h/c y el contenido correspondiente aparece en el epígrafe 1 al 3 del Manual de Introducción a la Estadística Descriptiva.

En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática, destacándose como puntos esenciales:

| Conceptos | Relaciones | Procedimientos |
| --- | --- | --- |
| Variable estadística<br>Variables cualitativas y cuantitativas<br>Variables discretas y continuas<br>Escalas nominal, ordinal, de intervalos y de razones | Relación entre el tipo de variable y la escala en que se puede cuantificar | Identificar el tipo de escala en que se puede cuantificar una variable<br>Determinar preguntas que se pueden realizar para estudiar una variable, atendiendo al tipo de escala en que se puede cuantificar. |

Esquema

El profesor debe explicar a los alumnos que la estadística informa sobre las propiedades generales y cuantificables de conjuntos de objetos o sucesos, en particular, sobre la distribución de determinadas características o cualidades en una población, pero que las proposiciones que se originan de la aplicación de sus métodos y procedimientos son válidas para la población, pero no para cada uno de los elementos de esta. Es decir, que si la media de las notas de un grupo es 7, esto no significa que cada alumno haya alcanzado esa nota.

Debe explicarse la diferencia entre población y muestra y cómo en la estadística descriptiva, como su nombre lo indica, se describen datos de un conjunto tomado como población, mientras que en la inferencial, por el contrario, se infieren las propiedades inherentes a la población a partir de una muestra, la cual debe ser representativa para que las inferencias que se hagan sean pertinentes. Se sugiere poner ejemplos sencillos de muestras no representativas, para que los alumnos a su vez pongan otros ejemplos, aún cuando en la unidad se tratarán solo contenidos de la estadística descriptiva.

En esta unidad temática se introducen las escalas para la cuantificación de las variables. Los alumnos deben saber las condiciones que se deben cumplir para aplicar un tipo u otro de escala y cómo es posible pasar de una escala superior a una inferior.

Determine en cada caso qué variable se está investigando, diga de qué tipo de variable se trata y en qué escala se ha cuantificado. Transforme las preguntas en el caso que la variable admita cuantificarse en una escala superior o inferior a la utilizada en la formulación de la pregunta.

1. Valore en una escala de 1 a 5 cómo ha sido la orientación profesional que se ha ofrecido a los alumnos de su grupo durante el presente curso.
   Nota: 5 indica la mayor presencia de la característica observada
2. ¿Considera que aprovecha el tiempo en clases? Sí__ No___
3. Indique los tiempos (en minutos) que los alumnos de su grupo necesitaron para calcular los divisores primos de 2550:

| | |
|---|---|
| [0,5,1,5) | |
| [1,5,2,5) | |
| [2,5,3,5) | |
| [3,5,4,5) | |

4. Indique cuántas ausencias a clases ha tenido hasta el momento en el curso.___
5. Escriba entre qué valores extremos ha estado la temperatura (en grados Celsius) durante este mes en su localidad.

**5.1 Representación de datos simples y agrupados mediante tablas, gráficos y medidas de tendencia central**

Para el tratamiento de este punto esencial se sugieren 7h/c y el contenido correspondiente aparece los epígrafes 4 y 5 en el Manual de Introducción a la Estadística Descriptiva.

| Conceptos | Relaciones | Procedimientos |
| --- | --- | --- |
| Tipos de variables estadísticas<br>Datos simples y agrupados<br>Tablas de frecuencia absoluta, relativa y relativa porcentual<br>Gráficos<br>Medidas de tendencia central | Fórmulas para el cálculo de moda(s), la media aritmética y la mediana<br>Propiedades de la media aritmética | Representar datos en tablas<br>Representar datos en gráficos<br>Calcular moda (s), media y mediana |
| Tablas y gráficos de frecuencias absolutas y relativas acumuladas | | Interpretación de tablas y gráficos de frecuencias absolutas y relativas acumuladas |

Esquema

Muchos de los contenidos de esta subunidad temática han sido estudiados por los alumnos en los grados precedentes. El trabajo con datos agrupados es uno de los contenidos que mayor dificultad les puede presentar. Se puede partir de ejercicios y problemas similares a los ejemplos 18 y 19 de las pp. 25-34 de Introducción a la Estadística Descriptiva; con ellos se profundiza en el tratamiento de datos agrupados de variables cuantitativas discretas y continuas. Se profundizará en conceptos tales como clases, intervalos de clases, límites de clases, marcas de clase, amplitud de las clases y limites reales de las clases, así como en la construcción de tablas de frecuencias y gráficos (histogramas y polígonos de frecuencias). Debe llamarse la atención de que el área bajo la línea poligonal es igual al área cubierta por los rectángulos del histograma.

Los alumnos deben tener claro que cuando la distribución es asimétrica o tiene varias modas, o presenta clases abiertas en los extremos, o los datos no están medidos en una escala de intervalos o de razones o la muestra es muy pequeña, no se debe determinar la media aritmética, sino que es más apropiado determinar los otros estadígrafos de posición como la mediana y la moda.

En la tabla de frecuencias siguiente se han organizado los datos sobre la estatura en centímetros de los jugadores de un equipo de baloncesto. La información se ha presentado agrupada en intervalos.

| Intervalo | $F_i$ |
|---|---|
| 178 – 183 | 1 |
| 184 – 189 | 2 |
| 190 – 195 | 4 |
| 196 – 201 | 3 |
| 202 – 207 | 2 |
| 208 – 213 | 1 |

a) El análisis de esta situación en la clase puede conducirse hacia el tratamiento de conceptos tales como: *clases, intervalos de clases, límites de clases, marcas de clase, amplitud de las clases y límites reales de las clases.*

b) La situación propicia la posibilidad de reactivar *la construcción de tablas de frecuencias y gráficos.*

c) Esta situación permite a la vez reactivar y sistematizar el trabajo con las medidas de tendencia central.

Al concluir la unidad temática los estudiantes deben resolver ejercicios que integren el contenido, similar a como se muestra en el ejemplo:
Concluye la construcción de la tabla de frecuencias siguiente, donde se han organizado los datos sobre las calificaciones obtenidas en cálculo numérico de un grupo de 40 estudiantes de los 357 de una escuela primaria.

| *Clases calificaciones en puntos)* | *Fi* | *fi%* | *Fai ↓* | *xi* | *fai % ↓* | *xi•Fi* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *[50;60)* | | *10* | *4* | | | |
| *[ 60;70)* | *8* | | | *65* | | |
| *[70;80)* | | *30* | | | *60* | *800* |
| *[80;90)* | *10* | | *34* | | | |
| *[90;100)* | *6* | | | *95* | | |
| *Total* | | | | | | |

a) Completa los espacios en blanco

- La población es de __ estudiantes.
- La variable estudiada es ________
- La escala de medición de la variable es __________________.

b) Determina la calificación promedio (media aritmética).

c) Halla la amplitud de las clases.

d) ¿Cuántos alumnos obtuvieron menos de 80 puntos?

e) Diga la clase modal. Justifica.

f) Halla en qué intervalo se encuentra la calificación que ocupa la posición central.

g) Construye un histograma de frecuencias relativas porcentuales y uno de frecuencias absolutas acumuladas e interpreta la información que te proporcionan.

**5.3 Medidas de dispersión para datos simples y agrupados**

Para el tratamiento de esta unidad temática se sugieren 5 h/c. El contenido correspondiente a las medidas de dispersión para datos simples aparece en el epígrafe

6 pág 40-46 del manual de Introducción a la Estadística Descriptiva y en el presente material se ofrecerán las orientaciones necesarias para el trabajo con datos agrupados.
En el esquema se representa la interrelación entre los conceptos, relaciones y procedimientos que se tratan en esta unidad temática, destacándose como puntos esenciales:

**Estructura interna de la subunidad temática 5.3**

| Conceptos | Relaciones | Procedimientos |
|---|---|---|
| Recorrido o rango<br>Desviación media<br>Varianza<br>Desviación típica o estándar<br>Coeficiente de variación de Pearson | Fórmulas para las medidas de dispersión<br>Propiedades de la varianza | Cálculo e interpretación del recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica |

Esquema

Las medidas estadísticas caracterizan la información que se dispone; algunas suelen situarse hacia el centro de la distribución de datos (medidas de tendencia central), pero por lo general no son suficientes para caracterizar una distribución estadística, por lo que se requieren otras que muestran la variabilidad o dispersión de los datos respecto a un valor central.

Como motivación para la unidad temática se les puede presentar a los estudiantes una situación como la siguiente:

Ejemplo 1: En un concurso de Historia sobre el significado del Escudo Nacional participan dos equipos de seis alumnos cada uno. Cuando se recurre a las *medidas de tendencia central* para identificar al mejor, se observa que aunque todos los participantes no logran la misma puntuación, ambos tienen un rendimiento medio de 6,83 puntos y el valor de la mediana es 7.

| Equipo A | | Equipo B | |
|---|---|---|---|
| A1 | 3 | B1 | 5 |
| A2 | 4 | B2 | 5 |
| A3 | 5 | B3 | 6 |
| A4 | 9 | B4 | 8 |
| A5 | 10 | B5 | 8 |
| A6 | 10 | B6 | 9 |
| $\sum x_i$ | 41 | $\sum x_i$ | 41 |
| Media $\bar{x}$ | 6,83 | Media $\bar{x}$ | 6,83 |
| Mediana $M_e$ | 7 | Mediana $M_e$ | 7 |

Ante semejante situación se puede explicar que la determinación de las medidas de tendencia central, aunque permiten describir la distribución, no siempre dan la idea completa del comportamiento de la variable estudiada. Para caracterizar la dispersión de los datos, se hace necesario utilizar otras medidas que indiquen la variabilidad de la información en relación con los valores centrales, es decir, las *medidas de dispersión*.

**El rango o amplitud de variación:** Es la diferencia del valor más grande menos el valor más pequeño de la colección: $R = X_{\text{máxima}} - X_{\text{mínima}}$. Es la más simple de las medidas de dispersión y se utiliza para comparar rápidamente dos distribuciones. Cuanto mayor sea la diferencia, tanto mayor será la dispersión. Tiene la ventaja de su fácil comprensión y determinación. Está determinada por los valores extremos, lo cual puede ser una ventaja si estos son de interés para la investigación, pero tiene la desventaja que no proporciona información sobre la distribución de la mayoría de los datos. Debe ser utilizada para pequeñas muestras ($n \le 12$), pues tiene un comportamiento poco estable y varía grandemente en dependencia del tamaño de la muestra.

Como el rango es poco confiable, es necesario estudiar otras medidas de dispersión, una posibilidad es *calcular la diferencia de cada uno de los datos y la media, y calcular la media de tales diferencias.*

A través del cálculo y reflexiones con los estudiantes se puede llegar a la conclusión de que la media de esa diferencia es 0, pues se compensan las diferencias positivas con las negativas; y para evitarlo se puede trabajar con la media del valor absoluto de estas diferencias, surgiendo así una nueva medida de dispersión: l***a desviación media***

**La desviación media** se define como la media aritmética de los *valores absolutos* de las *diferencias* entre los datos de la distribución y su *media aritmética*. Este estadígrafo revela donde estarían concentrados los datos si estuvieran todos a la misma distancia de la media aritmética.

Para los datos simples se expresa como $D\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$

y como $D\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|$ para la distribuciones de datos agrupados.

Donde:

$D_{\bar{x}}$: desviación media

$f_i$: frecuencia del valor i o de la marca de clase i

$\bar{x}$: media aritmética

k: número de clases

Se les puede comentar a los estudiantes que por dificultades en el manejo algebraico de los valores absolutos, se utiliza poco la desviación media y se usa la media de estas diferencias elevadas al cuadrado, obteniendo de este modo el concepto de **Varianza.**

**La varianza** $s^2$ de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, se define como la media de los cuadrados de las desviaciones de los datos de la variable respecto a la media.

Se calcula como $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$ para datos simples y como $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}$ para el caso de los datos agrupados, donde las variables tienen el significado arriba expresado.

Llegado a este punto se les puede hacer notar a los estudiantes que como en la varianza, las diferencias entre cada dato y la media se elevan al cuadrado, entonces esta medida para valores grande toma valores aún más grandes y para valores menores que 1, valores más pequeños. Ella se expresa en una unidad de medida al cuadrado; por lo que para resolver esta situación se define la **desviación típica o estándar.** Es la medida de variabilidad más comúnmente usada y de mayor confianza.

**La desviación típica o estándar** se define como la raíz aritmética de la varianza y se denota por la letra s.

En las ecuaciones para la varianza y la desviación típica se acostumbra dividir por n-1 en lugar de por n, por resultar estas medidas mejores estimadores de los parámetros poblaciones, como se podrá profundizar en estudios superiores.

Para introducir el estudio del coeficiente de variación se explica que para poder apreciar la magnitud de la dispersión necesitamos relativizar la medida, de manera que permita determinar en qué distribución los datos están más agrupados y, por tanto, la media es más representativa. O dicho con otras palabras, en qué muestra A o B es mayor la dispersión de una característica determinada.

El coeficiente de variación se define mediante el cociente entre el valor de la desviación típica y el valor de la media, se expresa generalmente en tanto por ciento o porcentaje; para calcularlo se utiliza la expresión: $V = \frac{s}{\bar{x}}.100$. El coeficiente de variación es adimensional, por eso admite comparar distribuciones en las cuales las variables están expresadas en diferentes unidades de medida.

Es conveniente aprovechar las posibilidades que brinda la informática para hacer este proceso de forma rápida, a partir de los distintos paquetes profesionales que se han elaborado o de Microsoft Excel.

Para la fijación del contenido se pueden plantear tareas como las siguientes:

En la lista se ofrecen los datos correspondientes al peso en kilogramos (redondeado a cantidades enteras) de una especie de animales.

2 3 4 3 5 3 2 4 3 5 3 2 5 3 4 2 5 5 4 3 5 4 3 2 2

a) ¿Cuál o cuáles de las medidas estadísticas (media aritmética, mediana, moda(s)) se adecua más para describir la distribución de los pesos? Fundamenta tu respuesta y en correspondencia con ella, determina esas medidas y caracteriza la distribución de los pesos en el grupo estudiado.
b) Investiga la dispersión de los datos. Explica el significado del resultado obtenido. Presenta tu respuesta en el equipo de estudio.

| $X_i$ Cantidad de llamadas telefónicas | $F_i$ Cantidad de días |
|---|---|
| 15-25 | 15 |
| 26-36 | 15 |
| 37-47 | 32 |

Para el estudio del funcionamiento de una pizarra telefónica durante sus primeros 100 días, se organiza la información en una tabla de frecuencias de datos agrupados. Se conoce además que la media es de 43 llamadas diarias, la mediana es 41,5 y la moda es 44; sin embargo existen días con un mínimo de 15 y otros con un máximo de 79 llamadas, lo que evidencia cierta dispersión en la frecuencia de los datos.

| | |
|---|---|
| 48-58 | 24 |
| 59-69 | 10 |
| 70-80 | 4 |

a) ¿Cuál de las medidas de dispersión utilizarías, para hacer el análisis del funcionamiento de la pizarra telefónica?
b) Realiza un informe con la valoración de cómo se comporta la distribución de las llamadas durante los 100 días.

2. Al finalizar una carrera de velocidad, el profesor de Educación Física midió las pulsaciones de cada uno de los 30 alumnos del grupo. Los resultados obtenidos se encuentran en la tabla siguiente. Fundamenta qué información se puede extraer de la tabla.

| RITMO DE PULSACIONES | ALUMNOS $F_i$ |
|---|---|
| [80;90) | 2 |
| [90;100) | 8 |
| [100;110) | 13 |
| [110;120) | 4 |
| [120;130) | 3 |

3. Una fábrica de refrescos utiliza dos máquinas embotelladoras semejantes con la misma capacidad de llenado de dos litros. Para el control de la calidad se seleccionan 6 pomos de cada máquina y se mide la cantidad de refresco existente en cada uno, obteniéndose los resultados en litros que muestra la tabla.

a) ¿Cuál de las máquinas es más precisa? Justifica tu respuesta.

| Máquina A | Máquina B |
|---|---|
| 2,04 | 1,98 |
| 1,96 | 1,98 |
| 1,96 | 2,00 |
| 2,00 | 2,03 |

| | |
|---|---|
| 1,99 | 1,98 |
| 2,02 | 2,01 |