Supplementary Material for the paper

“Pairwise likelihood inference for nested hidden Markov chain models for multilevel longitudinal data”

by Francesco Bartolucci and Monia Lupparelli

In the Supplementary Material we collect Table S-1 and Table S-2 related to the order of complexity of the algorithm for computing the manifest distribution and the pairwise likelihood discussed in Sections 4.2 and 5.1. We also include Tables S-3, S-4, S-5, S-6, S-7, and S-8 showing the results of the simulation study described in Section 6. Finally, we represent simulated trajectories from the estimated latent processes, at individual and cluster-level, in Figures S-1 and S-2.

Table S-1: *Order of the numerical complexity required to compute the manifest distribution in (6) by recursion (2) for different values of k_1 , k_2 , n_h , and T .*

k_1	k_2	$T = 5$			$T = 10$		
		$n_h = 5$	$n_h = 10$	$n_h = 20$	$n_h = 5$	$n_h = 10$	$n_h = 20$
1	1	25	50	100	50	100	200
1	2	100	200	400	200	400	800
1	3	225	450	900	450	900	1800
1	4	400	800	1600	800	1600	3200
1	5	625	1250	2500	1250	2500	5000
2	1	800	1600	3200	51200	102400	204800
2	2	3200	6400	12800	204800	409600	819200
2	3	7200	14400	28800	460800	921600	1843200
2	4	12800	25600	51200	819200	1638400	3276800
2	5	20000	40000	80000	1280000	2560000	5120000
3	1	6075	12150	24300	2952450	5904900	11809800
3	2	24300	48600	97200	11809800	23619600	47239200
3	3	54675	109350	218700	26572050	53144100	106288200
3	4	97200	194400	388800	47239200	94478400	188956800
3	5	151875	303750	607500	73811250	147622500	295245000
4	1	25600	51200	102400	52428800	104857600	209715200
4	2	102400	204800	409600	209715200	419430400	838860800
4	3	230400	460800	921600	471859200	943718400	1887436800
4	4	409600	819200	1638400	838860800	1677721600	3355443200
4	5	640000	1280000	2560000	1310720000	2621440000	5242880000
5	1	78125	156250	312500	488281250	976562500	1953125000
5	2	312500	625000	1250000	1953125000	3906250000	7812500000
5	3	703125	1406250	2812500	4394531250	8789062500	17578125000
5	4	1250000	2500000	5000000	7812500000	15625000000	31250000000
5	5	1953125	3906250	7812500	12207031250	24414062500	48828125000

Table S-2: *Order of the numerical complexity required to compute the pairwise manifest probability (12) for all units in the same cluster h and different values of k_1 , k_2 , n_h , and T .*

		$T = 5$			$T = 10$		
k_1	k_2	$n_h = 5$	$n_h = 10$	$n_h = 20$	$n_h = 5$	$n_h = 10$	$n_h = 20$
1	1	50	225	950	100	450	1900
1	2	800	3600	15200	1600	7200	30400
1	3	4050	18225	76950	8100	36450	153900
1	4	12800	57600	243200	25600	115200	486400
1	5	31250	140625	593750	62500	281250	1187500
2	1	200	900	3800	400	1800	7600
2	2	3200	14400	60800	6400	28800	121600
2	3	16200	72900	307800	32400	145800	615600
2	4	51200	230400	972800	102400	460800	1945600
2	5	125000	562500	2375000	250000	1125000	4750000
3	1	450	2025	8550	900	4050	17100
3	2	7200	32400	136800	14400	64800	273600
3	3	36450	164025	692550	72900	328050	1385100
3	4	115200	518400	2188800	230400	1036800	4377600
3	5	281250	1265625	5343750	562500	2531250	10687500
4	1	800	3600	15200	1600	7200	30400
4	2	12800	57600	243200	25600	115200	486400
4	3	64800	291600	1231200	129600	583200	2462400
4	4	204800	921600	3891200	409600	1843200	7782400
4	5	500000	2250000	9500000	1000000	4500000	19000000
5	1	1250	5625	23750	2500	11250	47500
5	2	20000	90000	380000	40000	180000	760000
5	3	101250	455625	1923750	202500	911250	3847500
5	4	320000	1440000	6080000	640000	2880000	12160000
5	5	781250	3515625	14843750	1562500	7031250	29687500

Table S-3: *Simulation results for $k_1 = k_2 = 2$ and $T = 5$.*

	ρ_1	ρ_2	τ_1	τ_2	δ_0	δ_1	δ_2	α_2	β_2
true value	-2.197	-2.197	-2.197	-2.197	-2.000	1.000	-1.000	2.000	2.000
<i>unweighted pairwise likelihood</i>									
$H = 200, U(1; 10)$									
bias	-0.070	-0.027	-0.496	-0.485	-0.096	0.021	-0.017	0.044	0.203
sd	0.371	0.413	2.118	2.325	0.444	0.080	0.088	0.183	0.396
rmse	0.380	0.416	2.185	2.387	0.456	0.083	0.090	0.189	0.447
mean-se	0.404	0.394	1.314	1.337	0.402	0.081	0.081	0.182	0.389
$H = 200, U(1; 20)$									
bias	-0.031	-0.015	-0.039	-0.047	-0.054	0.011	-0.012	0.022	0.079
sd	0.282	0.252	0.540	0.518	0.318	0.047	0.050	0.108	0.196
rmse	0.285	0.253	0.544	0.523	0.324	0.048	0.052	0.111	0.212
mean-se	0.294	0.291	0.563	0.558	0.311	0.053	0.053	0.114	0.244
$H = 400, U(1; 10)$									
bias	-0.020	-0.027	-0.184	-0.161	-0.005	0.002	-0.001	0.005	0.027
sd	0.235	0.249	0.872	0.797	0.284	0.053	0.052	0.117	0.205
rmse	0.237	0.252	0.895	0.817	0.285	0.053	0.052	0.118	0.208
mean-se	0.257	0.257	0.635	0.611	0.295	0.051	0.051	0.111	0.229
$H = 400, U(1; 20)$									
bias	-0.009	0.015	-0.081	-0.041	0.020	-0.001	-0.001	0.002	0.013
sd	0.192	0.191	0.324	0.315	0.179	0.031	0.032	0.069	0.136
rmse	0.193	0.193	0.335	0.319	0.181	0.032	0.032	0.069	0.137
mean-se	0.197	0.197	0.358	0.360	0.202	0.036	0.036	0.077	0.158
<i>weighted pairwise likelihood</i>									
$H = 200, U(1; 10)$									
bias	-0.052	-0.056	-0.271	-0.291	-0.116	0.019	-0.017	0.045	0.166
sd	0.358	0.375	1.378	1.559	0.417	0.065	0.075	0.151	0.341
rmse	0.364	0.381	1.412	1.593	0.435	0.068	0.077	0.158	0.381
mean-se	0.380	0.370	1.439	1.443	0.407	0.075	0.075	0.173	0.371
$H = 200, U(1; 20)$									
bias	-0.036	-0.009	-0.031	-0.003	-0.029	0.010	-0.013	0.025	0.072
sd	0.259	0.235	0.509	0.482	0.284	0.042	0.047	0.100	0.185
rmse	0.263	0.236	0.513	0.485	0.287	0.043	0.049	0.104	0.199
mean-se	0.262	0.261	0.518	0.508	0.288	0.050	0.050	0.107	0.225
$H = 400, U(1; 10)$									
bias	-0.015	-0.025	-0.142	-0.098	0.004	0.003	-0.001	0.009	0.027
sd	0.223	0.218	0.581	0.538	0.270	0.046	0.044	0.104	0.180
rmse	0.225	0.221	0.601	0.550	0.272	0.046	0.044	0.105	0.183
mean-se	0.240	0.240	0.604	0.596	0.260	0.047	0.047	0.106	0.218
$H = 400, U(1; 20)$									
bias	-0.004	0.019	-0.079	-0.048	0.017	-0.001	-0.001	0.001	0.011
sd	0.180	0.183	0.330	0.305	0.174	0.030	0.031	0.065	0.135
rmse	0.181	0.185	0.341	0.310	0.176	0.030	0.031	0.065	0.136
mean-se	0.178	0.178	0.332	0.338	0.186	0.033	0.034	0.072	0.147
<i>full likelihood</i>									
$H = 200, U(1; 10)$									
bias	-0.029	-0.022	-0.110	-0.141	-0.060	0.015	-0.012	0.021	0.083
sd	0.290	0.288	0.824	0.933	0.250	0.064	0.067	0.131	0.268
rmse	0.293	0.290	0.835	0.948	0.258	0.066	0.069	0.133	0.282
$H = 200, U(1; 20)$									
bias	-0.011	0.001	0.026	0.022	-0.043	0.010	-0.014	0.020	0.060
sd	0.213	0.205	0.380	0.389	0.175	0.040	0.044	0.093	0.175
rmse	0.214	0.206	0.383	0.392	0.181	0.042	0.046	0.095	0.186
$H = 400, U(1; 10)$									
bias	-0.003	-0.016	-0.065	-0.051	-0.005	0.003	0.000	0.001	0.022
sd	0.172	0.184	0.382	0.366	0.190	0.044	0.041	0.089	0.161
rmse	0.173	0.186	0.389	0.372	0.191	0.044	0.041	0.090	0.164
$H = 400, U(1; 20)$									
bias	-0.001	-0.001	-0.047	-0.035	0.001	-0.002	-0.001	-0.001	0.008
sd	0.136	0.146	0.282	0.274	0.121	0.027	0.028	0.060	0.121
rmse	0.137	0.147	0.288	0.278	0.122	0.027	0.028	0.060	0.122

Table S-4: *Simulation results for $k_1 = 2$ and $k_2 = 3$ and $T = 5$.*

	ρ_1	ρ_2	τ_1	τ_2	τ_3	δ_0	δ_1	δ_2	α_2	β_2	β_3
true value	-2.197	-2.197	-2.079	-2.890	-2.079	-3.000	1.000	-1.000	2.000	2.000	4.000
<i>unweighted pairwise likelihood</i>											
<i>H = 200, U(1; 10)</i>											
bias	0.000	-0.039	0.416	0.887	0.384	-0.597	0.070	-0.072	0.192	0.416	1.039
sd	0.472	0.451	1.667	3.010	1.709	1.126	0.121	0.137	0.288	1.118	1.928
rmse	0.475	0.454	1.726	3.153	1.760	1.279	0.140	0.156	0.347	1.198	2.198
mean-se	0.485	0.502	0.749	1.181	0.645	0.995	0.115	0.116	0.293	0.993	1.457
<i>H = 200, U(1; 20)</i>											
bias	-0.036	-0.001	0.098	0.445	0.084	-0.216	0.017	-0.023	0.051	0.230	0.257
sd	0.339	0.346	0.451	2.163	0.824	1.057	0.068	0.082	0.171	1.077	1.093
rmse	0.343	0.347	0.464	2.219	0.833	1.084	0.071	0.086	0.180	1.107	1.128
mean-se	0.355	0.349	0.512	0.770	0.967	0.738	0.070	0.071	0.166	0.708	0.951
<i>H = 400, U(1; 10)</i>											
bias	-0.035	0.014	0.297	0.114	0.035	-0.230	0.024	-0.020	0.049	0.175	0.423
sd	0.342	0.323	1.597	1.494	0.504	0.679	0.068	0.068	0.165	0.567	0.703
rmse	0.346	0.325	1.632	1.506	0.507	0.720	0.072	0.071	0.173	0.596	0.823
mean-se	0.345	0.367	0.728	0.649	0.592	0.800	0.071	0.070	0.173	0.667	0.913
<i>H = 400, U(1; 20)</i>											
bias	-0.020	-0.016	0.095	0.007	0.052	-0.120	0.006	-0.007	0.022	0.080	0.205
sd	0.249	0.245	0.333	0.296	0.435	0.327	0.042	0.042	0.093	0.271	0.490
rmse	0.250	0.246	0.347	0.297	0.439	0.348	0.043	0.043	0.096	0.282	0.531
mean-se	0.244	0.245	0.420	0.447	0.373	0.458	0.047	0.046	0.105	0.344	0.537
<i>weighted pairwise likelihood</i>											
<i>H = 200, U(1; 10)</i>											
bias	0.021	-0.047	0.275	0.737	0.329	-0.456	0.057	-0.059	0.174	0.314	0.869
sd	0.441	0.401	1.022	2.631	1.357	0.966	0.106	0.120	0.265	0.945	1.811
rmse	0.444	0.406	1.063	2.745	1.403	1.073	0.121	0.135	0.318	1.001	2.017
mean-se	0.508	0.503	0.876	1.574	0.932	0.977	0.110	0.112	0.302	0.971	2.257
<i>H = 200, U(1; 20)</i>											
bias	-0.042	-0.018	0.130	0.310	0.033	-0.164	0.016	-0.021	0.047	0.166	0.186
sd	0.315	0.333	0.537	1.492	0.544	0.640	0.063	0.068	0.159	0.569	0.699
rmse	0.319	0.335	0.555	1.531	0.548	0.663	0.066	0.072	0.167	0.595	0.727
mean-se	0.336	0.339	0.520	0.836	0.555	0.625	0.068	0.068	0.158	0.650	0.822
<i>H = 400, U(1; 10)</i>											
bias	-0.022	-0.007	0.166	0.159	0.089	-0.148	0.025	-0.020	0.053	0.128	0.338
sd	0.320	0.299	0.956	1.276	0.536	0.604	0.064	0.064	0.169	0.499	0.651
rmse	0.322	0.301	0.975	1.292	0.546	0.625	0.069	0.068	0.178	0.518	0.737
mean-se	0.334	0.322	0.520	0.654	0.459	0.565	0.065	0.064	0.157	0.511	0.727
<i>H = 400, U(1; 20)</i>											
bias	-0.027	-0.036	0.058	0.043	0.040	-0.086	0.002	-0.006	0.012	0.011	0.161
sd	0.234	0.232	0.327	0.583	0.387	0.356	0.041	0.040	0.090	0.550	0.500
rmse	0.235	0.235	0.333	0.584	0.389	0.366	0.041	0.040	0.091	0.550	0.526
mean-se	0.222	0.223	0.380	0.396	0.334	0.411	0.043	0.043	0.097	0.324	0.494
<i>full likelihood</i>											
<i>H = 200, U(1; 10)</i>											
bias	0.001	0.005	0.108	0.164	0.166	-0.262	0.036	-0.036	0.085	0.362	0.424
sd	0.288	0.312	0.637	0.761	0.854	0.739	0.089	0.095	0.208	1.485	0.814
rmse	0.289	0.314	0.649	0.782	0.874	0.788	0.096	0.102	0.226	1.536	0.922
<i>H = 200, U(1; 20)</i>											
bias	-0.016	-0.014	0.018	0.023	0.002	-0.042	0.006	-0.010	0.008	0.018	0.091
sd	0.241	0.242	0.333	0.451	0.368	0.318	0.056	0.061	0.123	0.246	0.388
rmse	0.242	0.243	0.336	0.454	0.370	0.323	0.057	0.062	0.124	0.248	0.400
<i>H = 400, U(1; 10)</i>											
bias	0.009	-0.006	0.063	0.075	0.039	-0.073	0.018	-0.013	0.026	0.044	0.147
sd	0.228	0.227	0.346	0.407	0.434	0.395	0.056	0.055	0.128	0.340	0.489
rmse	0.229	0.228	0.353	0.416	0.438	0.403	0.059	0.057	0.132	0.344	0.513
<i>H = 400, U(1; 20)</i>											
bias	-0.001	-0.003	0.005	-0.012	0.004	-0.032	-0.002	-0.002	-0.005	0.033	0.053
sd	0.152	0.176	0.216	0.281	0.190	0.223	0.039	0.035	0.069	0.169	0.294
rmse	0.152	0.176	0.216	0.281	0.190	0.225	0.039	0.035	0.069	0.172	0.299

Table S-5: *Simulation results for $k_1 = 3$ and $k_2 = 2$ and $T = 5$.*

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	δ_0	δ_1	δ_2	α_2	α_3	β_2
true value	-2.079	-2.890	-2.079	-2.197	-2.197	-3.000	1.000	-1.000	2.000	4.000	2.000
<i>unweighted pairwise likelihood</i>											
$H = 200, U(1; 10)$											
bias	0.100	0.027	0.034	-0.370	-0.355	-0.288	0.029	-0.025	0.103	0.221	0.318
sd	0.476	0.427	0.460	1.991	1.980	0.760	0.113	0.116	0.366	0.536	0.550
rmse	0.488	0.430	0.463	2.035	2.022	0.816	0.117	0.120	0.382	0.582	0.637
mean-se	0.548	0.531	0.454	1.168	1.231	0.804	0.095	0.096	0.417	0.626	0.558
$H = 200, U(1; 20)$											
bias	0.012	0.018	0.021	-0.170	-0.116	-0.073	0.017	-0.018	0.041	0.083	0.136
sd	0.338	0.322	0.309	1.179	1.167	0.441	0.061	0.056	0.219	0.339	0.308
rmse	0.340	0.325	0.311	1.197	1.179	0.449	0.064	0.059	0.224	0.350	0.338
mean-se	0.366	0.332	0.359	0.887	0.851	0.508	0.065	0.065	0.252	0.366	0.357
$H = 400, U(1; 10)$											
bias	0.043	-0.017	0.003	-0.237	-0.224	-0.081	0.010	-0.008	0.041	0.069	0.099
sd	0.314	0.305	0.303	0.951	0.970	0.436	0.055	0.057	0.215	0.349	0.254
rmse	0.319	0.307	0.305	0.985	1.000	0.445	0.056	0.058	0.220	0.357	0.274
mean-se	0.371	0.302	0.338	0.804	0.802	0.450	0.057	0.057	0.231	0.337	0.302
$H = 400, U(1; 20)$											
bias	0.051	0.003	0.012	-0.108	-0.067	-0.034	-0.003	-0.003	0.015	0.047	0.053
sd	0.226	0.187	0.234	0.416	0.399	0.278	0.038	0.039	0.137	0.199	0.185
rmse	0.232	0.188	0.235	0.432	0.406	0.281	0.038	0.039	0.139	0.205	0.193
mean-se	0.239	0.212	0.230	0.458	0.458	0.289	0.040	0.040	0.152	0.232	0.200
<i>weighted pairwise likelihood</i>											
$H = 200, U(1; 10)$											
bias	0.092	0.010	0.002	-0.308	-0.249	-0.268	0.027	-0.027	0.108	0.213	0.296
sd	0.404	0.383	0.415	1.658	1.627	0.687	0.105	0.106	0.335	0.485	0.495
rmse	0.417	0.385	0.418	1.694	1.654	0.741	0.109	0.110	0.354	0.532	0.579
mean-se	0.725	0.541	0.656	2.110	1.618	1.640	0.121	0.116	0.748	1.018	0.667
$H = 200, U(1; 20)$											
bias	0.009	0.013	0.010	-0.130	-0.084	-0.074	0.013	-0.017	0.038	0.075	0.114
sd	0.296	0.296	0.280	0.954	0.953	0.396	0.054	0.055	0.204	0.332	0.268
rmse	0.297	0.297	0.281	0.968	0.962	0.405	0.056	0.057	0.208	0.342	0.293
mean-se	0.348	0.311	0.327	0.854	0.859	0.451	0.055	0.055	0.221	0.328	0.290
$H = 400, U(1; 10)$											
bias	0.052	-0.006	0.004	-0.144	-0.084	-0.068	0.011	-0.008	0.037	0.071	0.106
sd	0.294	0.272	0.290	0.516	0.534	0.428	0.049	0.050	0.215	0.327	0.239
rmse	0.300	0.274	0.291	0.539	0.543	0.436	0.050	0.051	0.219	0.336	0.263
mean-se	0.297	0.304	0.290	0.625	0.616	0.432	0.052	0.052	0.234	0.345	0.293
$H = 400, U(1; 20)$											
bias	0.043	-0.004	0.011	-0.099	-0.062	-0.019	-0.003	-0.001	0.003	0.040	0.039
sd	0.210	0.179	0.213	0.397	0.382	0.266	0.036	0.036	0.128	0.191	0.178
rmse	0.215	0.180	0.214	0.411	0.389	0.268	0.036	0.036	0.129	0.196	0.183
mean-se	0.213	0.192	0.207	0.421	0.423	0.271	0.037	0.037	0.142	0.215	0.185

Table S-6: *Simulation results for $k_1 = k_2 = 2$ and $T = 10$.*

	ρ_1	ρ_2	τ_1	τ_2	δ_0	δ_1	δ_2	α_2	β_2
true value	-2.197	-2.197	-2.197	-2.197	-2.000	1.000	-1.000	2.000	2.000
<i>unweighted pairwise likelihood</i>									
<i>H = 200, U(1; 10)</i>									
bias	-0.001	-0.014	-0.002	-0.024	-0.056	0.002	-0.001	0.018	0.054
sd	0.207	0.223	0.354	0.315	0.242	0.046	0.044	0.096	0.185
rmse	0.208	0.224	0.356	0.317	0.250	0.046	0.044	0.098	0.193
mean-se	0.239	0.243	0.298	0.310	0.241	0.046	0.046	0.105	0.181
<i>H = 200, U(1; 20)</i>									
bias	-0.031	-0.012	-0.016	-0.018	-0.005	0.002	-0.002	-0.002	0.017
sd	0.198	0.229	0.195	0.197	0.157	0.031	0.032	0.071	0.119
rmse	0.201	0.231	0.196	0.198	0.158	0.031	0.032	0.072	0.121
mean-se	0.199	0.201	0.201	0.200	0.151	0.033	0.032	0.072	0.117
<i>H = 400, U(1; 10)</i>									
bias	-0.020	-0.028	-0.051	-0.004	0.012	-0.003	-0.001	0.005	0.009
sd	0.155	0.168	0.194	0.193	0.159	0.035	0.031	0.064	0.112
rmse	0.157	0.171	0.202	0.194	0.160	0.035	0.031	0.065	0.113
mean-se	0.166	0.165	0.211	0.202	0.154	0.032	0.032	0.071	0.114
<i>H = 400, U(1; 20)</i>									
bias	-0.003	-0.011	-0.013	-0.015	-0.002	0.000	-0.001	-0.004	0.002
sd	0.143	0.141	0.141	0.143	0.118	0.022	0.025	0.047	0.084
rmse	0.144	0.142	0.142	0.144	0.119	0.022	0.025	0.047	0.084
mean-se	0.138	0.138	0.141	0.140	0.109	0.023	0.023	0.050	0.081
<i>weighted pairwise likelihood</i>									
<i>H = 200, U(1; 10)</i>									
bias	0.006	-0.014	0.009	-0.004	-0.050	0.002	-0.003	0.015	0.048
sd	0.198	0.198	0.328	0.307	0.221	0.043	0.043	0.091	0.183
rmse	0.199	0.199	0.330	0.308	0.228	0.043	0.043	0.093	0.190
mean-se	0.218	0.222	0.279	0.291	0.214	0.043	0.043	0.099	0.165
<i>H = 200, U(1; 20)</i>									
bias	-0.027	-0.011	-0.026	-0.009	0.007	0.002	-0.002	-0.005	0.017
sd	0.169	0.196	0.180	0.193	0.148	0.032	0.029	0.068	0.111
rmse	0.172	0.197	0.183	0.194	0.149	0.032	0.029	0.068	0.113
mean-se	0.177	0.178	0.189	0.190	0.143	0.031	0.030	0.067	0.110
<i>H = 400, U(1; 10)</i>									
bias	-0.030	-0.030	-0.052	0.000	0.018	-0.003	-0.002	0.006	0.006
sd	0.143	0.155	0.178	0.188	0.140	0.035	0.028	0.062	0.109
rmse	0.147	0.158	0.186	0.189	0.142	0.035	0.028	0.063	0.109
mean-se	0.151	0.151	0.199	0.190	0.145	0.029	0.030	0.067	0.107
<i>H = 400, U(1; 20)</i>									
bias	-0.003	-0.016	-0.007	-0.012	-0.006	0.001	-0.002	-0.003	0.005
sd	0.126	0.122	0.135	0.145	0.115	0.021	0.023	0.045	0.079
rmse	0.127	0.124	0.136	0.146	0.116	0.021	0.023	0.045	0.080
mean-se	0.123	0.123	0.133	0.131	0.102	0.022	0.021	0.047	0.076

Table S-7: *Simulation results for $k_1 = 2$ and $k_2 = 3$ and $T = 10$.*

	ρ_1	ρ_2	τ_1	τ_2	τ_3	δ_0	δ_1	δ_2	α_2	β_2	β_3
true value	-2.197	-2.197	-2.079	-2.890	-2.079	-3.000	1.000	-1.000	2.000	2.000	4.000
<i>unweighted pairwise likelihood</i>											
$H = 200, U(1; 10)$											
bias	0.002	0.023	0.067	-0.015	-0.002	-0.136	0.007	-0.005	0.039	0.091	0.197
sd	0.279	0.258	0.415	0.386	0.419	0.511	0.059	0.056	0.132	0.360	0.487
rmse	0.280	0.260	0.422	0.388	0.421	0.532	0.060	0.056	0.138	0.373	0.527
mean-se	0.303	0.306	0.357	0.513	0.350	0.492	0.058	0.057	0.142	0.401	0.604
$H = 200, U(1; 20)$											
bias	-0.043	-0.002	0.032	-0.019	-0.017	-0.055	0.001	-0.002	0.010	0.045	0.104
sd	0.253	0.244	0.255	0.340	0.264	0.329	0.034	0.039	0.084	0.245	0.328
rmse	0.258	0.246	0.258	0.342	0.266	0.335	0.034	0.039	0.085	0.251	0.346
mean-se	0.235	0.236	0.262	0.334	0.245	0.333	0.040	0.040	0.094	0.260	0.379
$H = 400, U(1; 10)$											
bias	-0.044	-0.033	0.021	-0.003	0.005	-0.091	0.001	-0.008	0.023	0.081	0.129
sd	0.187	0.210	0.247	0.339	0.264	0.341	0.038	0.041	0.087	0.274	0.392
rmse	0.193	0.214	0.249	0.341	0.265	0.355	0.038	0.042	0.090	0.287	0.414
mean-se	0.211	0.208	0.256	0.340	0.256	0.330	0.040	0.040	0.093	0.259	0.383
$H = 400, U(1; 20)$											
bias	0.002	-0.011	-0.008	0.016	0.033	-0.006	0.001	0.000	0.006	0.012	0.036
sd	0.166	0.153	0.199	0.256	0.177	0.243	0.028	0.028	0.064	0.158	0.265
rmse	0.167	0.154	0.200	0.258	0.181	0.245	0.028	0.028	0.064	0.159	0.269
mean-se	0.160	0.162	0.179	0.230	0.184	0.229	0.028	0.028	0.063	0.169	0.259
<i>weighted pairwise likelihood</i>											
$H = 200, U(1; 10)$											
bias	0.005	0.014	0.086	0.005	0.017	-0.153	0.010	-0.009	0.044	0.116	0.197
sd	0.269	0.248	0.382	0.392	0.437	0.470	0.053	0.054	0.127	0.344	0.466
rmse	0.270	0.250	0.394	0.394	0.440	0.497	0.055	0.055	0.135	0.365	0.508
mean-se	0.287	0.290	0.334	0.519	0.358	0.474	0.054	0.054	0.137	0.407	0.629
$H = 200, U(1; 20)$											
bias	-0.048	0.002	0.024	-0.034	-0.025	-0.039	0.002	-0.001	0.004	0.034	0.100
sd	0.223	0.213	0.238	0.294	0.219	0.310	0.032	0.035	0.083	0.229	0.302
rmse	0.229	0.214	0.241	0.297	0.222	0.314	0.032	0.035	0.083	0.233	0.319
mean-se	0.211	0.211	0.246	0.307	0.221	0.309	0.037	0.037	0.087	0.241	0.353
$H = 400, U(1; 10)$											
bias	-0.058	-0.036	0.032	-0.022	-0.007	-0.100	0.001	-0.009	0.020	0.079	0.137
sd	0.161	0.191	0.240	0.315	0.223	0.324	0.036	0.039	0.089	0.271	0.359
rmse	0.172	0.195	0.243	0.317	0.225	0.341	0.036	0.040	0.091	0.284	0.386
mean-se	0.203	0.196	0.249	0.312	0.232	0.319	0.037	0.037	0.088	0.247	0.358
$H = 400, U(1; 20)$											
bias	0.004	-0.009	-0.010	0.024	0.033	0.001	0.002	-0.002	0.007	0.008	0.027
sd	0.152	0.137	0.168	0.249	0.154	0.208	0.026	0.025	0.059	0.145	0.242
rmse	0.153	0.138	0.169	0.252	0.158	0.209	0.027	0.026	0.059	0.146	0.244
mean-se	0.145	0.147	0.167	0.220	0.174	0.215	0.027	0.026	0.060	0.156	0.242

Table S-8: *Simulation results for $k_1 = 3$ and $k_2 = 2$ and $T = 10$.*

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	δ_0	δ_1	δ_2	α_2	α_3	β_2
true value	-2.079	-2.890	-2.079	-2.197	-2.197	-3.000	1.000	-1.000	2.000	4.000	2.000
<i>unweighted pairwise likelihood</i>											
$H = 200, U(1; 10)$											
bias	0.024	0.030	0.011	0.013	0.004	-0.097	0.008	-0.005	0.043	0.055	0.107
sd	0.226	0.250	0.247	0.364	0.387	0.367	0.050	0.053	0.218	0.297	0.234
rmse	0.229	0.253	0.248	0.367	0.389	0.381	0.051	0.054	0.223	0.304	0.258
mean-se	0.241	0.263	0.251	0.377	0.371	0.378	0.050	0.050	0.204	0.293	0.221
$H = 200, U(1; 20)$											
bias	0.007	0.015	0.042	-0.011	-0.016	-0.006	0.005	-0.008	-0.017	0.004	0.045
sd	0.209	0.181	0.205	0.238	0.240	0.213	0.031	0.032	0.117	0.177	0.125
rmse	0.210	0.182	0.211	0.240	0.242	0.214	0.031	0.034	0.119	0.178	0.133
mean-se	0.220	0.202	0.214	0.258	0.261	0.239	0.036	0.036	0.137	0.209	0.144
$H = 400, U(1; 10)$											
bias	-0.012	0.006	0.026	-0.022	-0.031	-0.017	0.002	-0.002	0.004	0.007	0.040
sd	0.170	0.194	0.190	0.256	0.275	0.230	0.037	0.036	0.123	0.207	0.142
rmse	0.171	0.195	0.193	0.258	0.278	0.231	0.037	0.036	0.124	0.208	0.149
mean-se	0.184	0.179	0.190	0.258	0.258	0.237	0.035	0.035	0.132	0.195	0.142
$H = 400, U(1; 20)$											
bias	0.007	-0.005	0.013	-0.037	-0.004	0.017	-0.002	0.001	-0.012	-0.005	0.003
sd	0.164	0.140	0.149	0.172	0.177	0.161	0.024	0.027	0.094	0.147	0.104
rmse	0.165	0.140	0.150	0.176	0.178	0.162	0.025	0.027	0.096	0.148	0.105
mean-se	0.153	0.138	0.151	0.183	0.181	0.167	0.025	0.025	0.096	0.144	0.098
<i>weighted pairwise likelihood</i>											
$H = 200, U(1; 10)$											
bias	0.026	0.030	0.007	0.026	0.038	-0.071	0.008	-0.006	0.027	0.041	0.094
sd	0.192	0.237	0.234	0.328	0.342	0.325	0.046	0.050	0.212	0.280	0.208
rmse	0.194	0.240	0.236	0.330	0.346	0.334	0.047	0.050	0.214	0.284	0.229
mean-se	0.225	0.245	0.227	0.358	0.342	0.343	0.047	0.047	0.194	0.273	0.202
$H = 200, U(1; 20)$											
bias	0.002	0.016	0.037	-0.012	-0.013	-0.002	0.005	-0.006	-0.022	-0.005	0.044
sd	0.193	0.162	0.192	0.225	0.227	0.202	0.029	0.029	0.111	0.172	0.111
rmse	0.194	0.163	0.197	0.227	0.228	0.203	0.030	0.030	0.113	0.173	0.120
mean	0.192	0.180	0.189	0.237	0.241	0.219	0.034	0.034	0.128	0.192	0.134
$H = 400, U(1; 10)$											
bias	-0.008	-0.008	0.007	-0.025	-0.029	-0.021	0.002	-0.004	0.000	0.012	0.032
sd	0.156	0.178	0.165	0.237	0.243	0.210	0.032	0.032	0.117	0.182	0.136
rmse	0.157	0.179	0.166	0.240	0.246	0.212	0.033	0.033	0.118	0.184	0.140
mean-se	0.172	0.166	0.174	0.247	0.244	0.233	0.032	0.033	0.128	0.185	0.130
$H = 400, U(1; 20)$											
bias	0.003	-0.002	0.012	-0.028	-0.008	0.014	-0.001	0.000	-0.012	-0.006	0.004
sd	0.143	0.122	0.127	0.166	0.165	0.155	0.023	0.025	0.085	0.131	0.098
rmse	0.144	0.122	0.129	0.169	0.166	0.156	0.023	0.025	0.086	0.132	0.098
mean-se	0.135	0.125	0.134	0.171	0.169	0.156	0.023	0.023	0.089	0.133	0.091

Figure S-1: *Representation of 1,000 trajectories randomly generated from the estimated distribution of the cluster-level latent process; values are randomly perturbed in order to avoid overlapping and make the trajectories distinguishable.*

Figure S-2: *Representation of 1,000 trajectories randomly generated from the estimated distribution of the individual-level latent process; values are randomly perturbed in order to avoid overlapping and make the trajectories distinguishable.*