This item was submitted to [Loughborough's Research Repository](#) by the author.
Items in Figshare are protected by copyright, with all rights reserved, unless otherwise indicated.

Motion of a pair of gravitating bodies in dark energy presence: small deviations from Keplerian motion

PLEASE CITE THE PUBLISHED VERSION

<https://doi.org/10.1134/S1063772920100054>

PUBLISHER

Springer Verlag

VERSION

AM (Accepted Manuscript)

PUBLISHER STATEMENT

This is a post-peer-review, pre-copyedit version of an article published in Astronomy Reports. The final authenticated version is available online at: <https://doi.org/10.1134/S1063772920100054>

LICENCE

CC BY-NC-ND 4.0

REPOSITORY RECORD

Neishtadt, Anatoly, and Gennady Bisnovatyi-Kogan. 2020. "Motion of a Pair of Gravitating Bodies in Dark Energy Presence: Small Deviations from Keplerian Motion". Loughborough University.
<https://hdl.handle.net/2134/12816362.v1>.

Движение пары гравитирующих тел в присутствии темной энергии: малые отклонения от кеплеровского движения

Нейштадт А.И.^{1,2}, Бисноватый-Коган Г.С.^{1*}

Аннотация

Исследована задача о движении двух гравитирующих тел при наличии ТЭ, рассматриваемой как **возмущающий фактор**. В дополнение к частоте прецессии орбиты, полученной в предыдущих работах, вычисляется поправка к частоте орбитального движения за счет ТЭ. Эта поправка имеет тот же порядок, что и частота вращения перицентра, и потребовала более точного рассмотрения по сравнению с предыдущими. На основе используемого метода можно получить следующие по порядку приближения и исследовать отличия от усредненного движения.

1 Введение

Открытие темной энергии (ТЭ) в современной вселенной было сделано на основе наблюдения сверхновых типа Ia при красных смещениях $z \leq 1$ [1, 2], и измерения спектра флуктуаций космического микроволнового фонового излучения (КМФ) [3, 4]. Эти наблюдения привели к определению величины космологической постоянной $\Lambda \approx 10^{-56} \text{см}^{-2}$, отождествленной с ТЭ. Влияние ТЭ на свойства космологического расширения в современную эпоху рассматривалось в обзорах [5] - [12].

В более раннюю эпоху наблюдательные ограничения на величину космологической постоянной Λ и плотности темной энергии $\rho_{DE} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ были получены на основе прецизионных наблюдений тайминга двойных радиопульсаров и движения планет Солнечной системы. Анализ данных о прецессии перигелия Меркурия для получения ограничений на величину Λ проводился различными авторами [13], [14], [15], получавшими сильно различающиеся

^{*1}Институт космических исследований РАН, Москва. Адрес эл. почты: aneishta@iki.rssi.ru, gkogon@iki.rssi.ru . ² Университет Лафборо, Великобритания.

значения этих ограничений. В работе [15] был получен верхний предел $\Lambda < 4 \cdot 10^{-45} \text{ см}^{-2}$, упомянутый в последующих работах [16] - [19]. Таким образом, измеренное значение Λ оказалось более чем на 10 порядков меньше этого верхнего предела.

Гравитомагнитный эффект хода часов при их движении по орбите вокруг вращающегося тела состоит в разности скорости хода часов при их вращении по противоположно направленным орбитам [20, 21]. Влияние космологической постоянной на этот эффект, а также влияние Λ на релятивистскую прецессию перигелия, исследовались в работе [22]. Влияние космологической постоянной на прецессию перигелия Земли и Марса, исследованное в работах [15] и [24], привело к ограничению на значение Λ в виде $\Lambda < 1 \cdot 10^{-46} \text{ см}^{-2}$. Различные релятивистские эффекты в Солнечной системе на основе метрики Шварцшильда - де Ситтера были рассмотрены в работе [25]. Влияние [малой дополнительной центрально-симметричной силы](#) и космологического расширения вселенной на движение по кеплеровским орбитам исследовалось в работах [26] - [29].

В работах [30] - [32] было показано, что влияние ТЭ на динамику во внешних областях скоплений галактик может быть достаточно сильным. При рассмотрении относительно движения двух богатых скоплений влияние космологической постоянной может быть определяющим [33]. [Оценка влияния измеренной космологической постоянной \$\Lambda \approx 10^{-56} \text{ см}^{-2}\$ на прецессию орбиты планет вокруг Солнца](#) сделана в [22]. Было показано, что для солнечной системы это влияние очень мало, и частота прецессии орбиты Земли составляет величину $\sim 10^{-14}$ от эйнштейновского значения. В [22] показано, что отношение этих частот пропорционально 4-й степени размера большей полуоси орбиты $\sim a^4$, т.е. зависимость от периода обращения $\sim T^{8/3}$. Т.о. для Меркурия эта величина меньше в $(T_{\oplus}/T_{Mercury})^{8/3} \approx 365/88 \approx 44$ раза. Относительное влияние ТЭ на частоту прецессии уменьшается с приближением орбиты планеты к Солнцу, т.к. роль гравитации Солнца растет, а вклад ТЭ падает, ввиду постоянной плотности ее энергии. Гораздо сильнее влияние ТЭ на относительное движение галактик, когда роль ТЭ может стать сравнимой с притяжением между галактиками [30–32]. Временные масштабы при этом столь велики, что наблюдать можно только результаты длительного действия различных факторов.

Решение задачи Кеплера в присутствии ТЭ было получено в квази-ньютоновском приближении в работе [34]. Общее аналитическое решение, справедливое для произвольных Λ , было записано через различные эллиптические интегралы с использованием табличных формул [35]. Это громоздкое решение не очень удобно для анализа различных физических эффектов в задаче Кеплера, связанных с наличием ТЭ. В настоящей работе, в задаче о движении двух гравитирующих тел, наличие ТЭ рассматривается как [возмущающий фактор](#), аналогично [22]. При этом используется несколько отличающийся метод усреднения по траектории. В дополнение к частоте прецессии орбиты, полученной в [22], вычисляется поправка к частоте орбитального движения (или, эквивалентно, к интервалу времени

между двумя прохождениями через перигея) за счет ТЭ. Эта поправка имеет тот же порядок, что и частота вращения перигея, и потребовала более точного рассмотрения по сравнению с [22]. На основе используемого метода можно получить следующие по порядку приближения и исследовать отличия от усредненного движения.

2 Кеплеровское движение в вакууме

Движение двух гравитирующих тел с массами m_1, m_2 относительно друг друга сводится уравнению Кеплера, которое описывает движение тела с приведённой массой $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ вокруг неподвижного тела массы $M = m_1 + m_2$. Система уравнений для компонент (r, ϕ) вектора расстояния $\mathbf{r}$ между гравитирующими телами m и M имеет интегралы энергии E и углового момента L [36]

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad L = mv_\phi r, \quad v = \frac{dr}{dt}, \quad v_\phi = r \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.1)$$

Решение этой системы при $E < 0$ описывает замкнутые эллиптические траектории вида [36]

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos(\phi - g)}. \quad (2.2)$$

Большая полуось a и эксцентриситет ϵ эллипса равны

$$a = \frac{GM}{2|E|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3(GM)^2}}, \quad (2.3)$$

долгота перигея g определяет направление линии апсид, истинная аномалия $\phi - g$ определяет положение точки на орбите (ϕ - долгота).

3 Прецессия орбит в присутствии ТЭ

Присутствие темной энергии в квази-ньютоновском приближении учитывается дополнительной радиальной силой отталкивания, что приводит к изменению интеграла энергии, который принимает следующий вид

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{\Lambda mc^2}{6} r^2. \quad (3.1)$$

Как и во всяком центральном поле, движение происходит в плоскости. Орбиты в этой плоскости становятся незамкнутыми. Если влияние темной энергии считать малым возмущающим фактором, то орбита может быть представлена в виде медленно прецессирующей кеплеровской орбиты. В [22] скорости изменения уравнения оскулирующих элементов в

этой задаче усреднены по периоду кеплеровского движения. В результате получены следующие усредненные уравнения

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{dg}{dt} \right\rangle = \frac{\Lambda c^2}{2\omega} \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (3.2)$$

Последнее соотношение в (3.2) дает частоту прецессии перицентра.

4 Уравнения движения в гамильтоновой форме

Движение происходит в плоскости и описывается гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Будем использовать канонические переменные Делоне $I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2$ ([37], стр.340):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{\mu a}, & \varphi_1 &= l, \\ I_2 &= \sqrt{\mu a(1 - \epsilon^2)}, & \varphi_2 &= g. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $\mu = GM$, а l - средняя аномалия в задаче Кеплера. Напомним, что в задаче Кеплера средняя аномалия - это угловая переменная, которая равномерно изменяется при движении тел по орбите. Скорость ее изменения (среднее движение) $\omega = \sqrt{GM}/a^{3/2}$. Средняя аномалия выражается через эксцентрическую аномалию ξ с помощью уравнения Кеплера [36, 37]

$$l = \xi - \epsilon \sin \xi. \quad (4.2)$$

Гамильтониан задачи H пропорционален полной энергии, $H = E/m$. В переменных Делоне гамильтониан записывается в виде

$$\begin{aligned} H &= H_0(I_1) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \varphi_1), \\ H_0 &= -\frac{\mu^2}{2I_1^2}, & H_1 &= -r^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь r^2 должно быть выражено через I_1, I_2, φ_1 . Величина $\varepsilon = \frac{\Lambda c^2}{6}$ будет считаться малым параметром задачи, по которому проводятся разложения (это не безразмерная величина, но ее удобно использовать в разложениях, чтобы не вводить дополнительно безразмерный малый параметр). Этому гамильтониану соответствуют уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1}, & \dot{\varphi}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial I_1} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_1}, \\ \dot{I}_2 &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_2} = 0, & \dot{\varphi}_2 &= \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В этой записи учтено, что H_0 зависит только от I_1 , и поэтому частные производные H_0 по остальным переменным обращаются в 0.

Величина I_2 пропорциональна угловому моменту, $I_2 = L/m$, и является первым интегралом задачи, $I_2 = \text{const}$. В терминах уравнений (4.4) это связано с тем, что гамильтониан не зависит от угла φ_2 . Соответственно, частная производная гамильтониана по φ_2 тождественно обращается в 0, а канонически сопряженная к φ_2 переменная I_2 является первым интегралом.

Задача имеет также интеграл энергии $H = H_0(I_1) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \varphi_1) = h = \text{const}$, так как гамильтониан не зависит явно от времени.

Рассматриваемая задача интегрируема: для I_1 и φ_1 получается гамильтонова система с одной степенью свободы, зависящая от I_2 как от параметра. По найденным решениям этой системы можно затем получить зависимость φ_2 от времени квадратурой [34].

5 Применение канонической теории возмущений

5.1 Общее описание процедуры Делоне-Цейпеля

Мы будем строить приближенные решения при малых ε . В рассматриваемой задаче одна быстро меняющаяся угловая переменная, угол φ_1 , и две медленно меняющиеся переменные, I_1 и φ_2 (переменную I_2 можно рассматривать как параметр задачи). Для описания динамики будем использовать процедуру канонической теории возмущений в форме Делоне-Цейпеля [37], стр. 426. ^a Эта процедура применительно к рассматриваемой задаче состоит в том, что делается каноническая 2π -периодическая по φ_1, φ_2 , близкая к тождественной (отличающаяся от тождественной величинами порядка ε) замена переменных $I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2 \mapsto J_1, J_2, \psi_1, \psi_2$, такая, что гамильтониан в новых переменных зависит от быстрой угловой переменной ψ_1 лишь в членах выше заданного порядка. Если мы хотим исключить ψ_1 из гамильтониана вплоть до членов порядка ε^n включительно в разложении по малому параметру ε , то производящая функция нужной замены переменных ищется в виде многочлена степени n по ε . Отбрасывая в гамильтониане малый член порядка ε^{n+1} , получаем гамильтониан, не зависящий от переменной ψ_1 . В полученной гамильтоновой системе величина J_1 является первым интегралом, $J_1 = \text{const}$, в соответствии с гамильтоновыми уравнениями движения. Для остальных переменных получается система с меньшим на еди-

^aЭта процедура была предложена для неинтегрируемых задач, но она полезна и при построении приближенных решений в более простых случаях, когда рассматриваемая задача интегрируема и имеет точное решение. К тем же теоретическим результатам привело бы и использование более приспособленной для компьютерной реализации процедуры Хори-Депри [38]. В первом приближении процедуры Делоне-Цейпеля и Хори-Депри эквивалентны.

ницу числом степеней свободы, зависящая от J_1 как от параметра, причем все переменные в этой системе меняются медленно. После решения этой системы приближенное решение исходной системы получается с помощью обращения построенной замены переменных.

Для рассматриваемой задачи описанная процедура еще упрощается из-за того, что гамильтониан не зависит от φ_2 . Тогда процедура организуется так, что новый гамильтониан не зависит от ψ_2 , и $J_2 = I_2 = \text{const}$. Получается, что величины $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ постоянны. Это средние частоты изменения углов φ_1, φ_2 .

Мы ограничимся первым приближением описанной процедуры: возьмем $n = 1$. Делаем каноническую замену переменных $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \mapsto (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$ с производящей функцией

$$W = J_1\varphi_1 + J_2\varphi_2 + \varepsilon S(J_1, J_2, \varphi_1),$$

где S - пока не определенная 2π -периодическая по φ_1 функция (производящая функция зависит от старых координат φ_1, φ_2 и новых импульсов J_1, J_2).

Старые и новые переменные связаны соотношениями

$$I_1 = J_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_1}, \quad I_2 = J_2 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} = J_2, \quad \psi_1 = \varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial J_1}, \quad \psi_2 = \varphi_2 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial J_2}. \quad (5.1)$$

Замена переменных (5.1) близка к тождественной.

Подставляя в гамильтониан выражение для I_1 через J_1, φ_1, I_2 из (5.1), получаем

$$\begin{aligned} H &= H_0(J_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_1}) + \varepsilon H_1(J_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_1}, I_2, \varphi_1) \\ &= H_0(J_1) + \varepsilon \left[\frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + H_1(J_1, I_2, \varphi_1) \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Обозначим $\bar{H}_1$ среднее от H_1 по φ_1 . Хотим выбрать S так, чтобы было

$$\frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + H_1(J_1, I_2, \varphi_1) = \bar{H}_1(J_1, I_2).$$

Тогда S получается интегрированием по φ_1 из соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = -\frac{1}{\partial H_0(J_1)/\partial J_1} [H_1(J_1, I_2, \varphi_1) - \bar{H}_1(J_1, I_2)]. \quad (5.2)$$

Так как правая часть (5.2) 2π -периодическая функция от φ_1 со средним 0, то S получается 2π -периодической функцией от φ_1 . Мы будем выбирать функцию S так, что ее среднее по φ_1 равно 0. Гамильтониан в новых переменных

$$H = H_0(J_1) + \varepsilon \bar{H}_1(J_1, I_2) + O(\varepsilon^2).$$

Пренебрегая членом порядка ε^2 , получаем гамильтониан $\mathcal{H} = H_0(J_1) + \varepsilon \bar{H}_1(J_1, I_2)$ и уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= 0, \quad \dot{I}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} + \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial J_1}, \quad \dot{\psi}_2 = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_2}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{H}_1 = \bar{H}_1(J_1, I_2)$.

5.2 Поправки к кеплеровскому движению

Проведем выкладки.

Среднее от H_1 по φ_1 есть

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1 d\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi_1, \quad (5.3)$$

т.е., с точностью до знака, $\bar{H}_1$ - это нулевой член в известном разложении функции r^2 в ряд Фурье по средней аномалии (см., например, [37], с. 236, формула (2.3.8)):

$$\bar{H}_1 = -a^2 \left(1 + \frac{3\epsilon^2}{2}\right). \quad (5.4)$$

Поскольку

$$a^2 = I_1^4/\mu^2, \epsilon^2 = 1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}, \quad (5.5)$$

получаем

$$\bar{H}_1 = -\frac{I_1^4}{\mu^2} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right)\right) = -\left(\frac{5}{2} \frac{I_1^4}{\mu^2} - \frac{3}{2} \frac{I_1^2 I_2^2}{\mu^2}\right). \quad (5.6)$$

Заменяя здесь I_1 на J_1 , как это предписывается изложенной процедурой, получаем гамильтониан первого приближения

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H_0(J_1) + \varepsilon \bar{H}_1(J_1, I_2), \\ H_0(J_1) &= -\frac{\mu^2}{2J_1^2}, \quad \bar{H}_1(J_1, I_2) = -\left(\frac{5}{2} \frac{J_1^4}{\mu^2} - \frac{3}{2} \frac{J_1^2 I_2^2}{\mu^2}\right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для изменения угла ψ_2 в рассматриваемом приближении получаем

$$\dot{\psi}_2 = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1(J_1, I_2)}{\partial I_2} = 3\varepsilon J_1^2 I_2 / \mu^2. \quad (5.8)$$

Эта формула дает в рассматриваемом приближении среднюю частоту вращения перицентра. Погрешность этой формулы $\sim \varepsilon^2$. Без увеличения погрешности можно считать, что J_1 связано с величиной энергии h соотношением $h = -\mu^2/(2J_1^2)$. Определяя отсюда J_1 и подставляя в (5.8), получаем для средней частоты вращения перицентра выражение

$$\dot{\psi}_2 = \frac{3}{2} \varepsilon \frac{I_2}{|h|}. \quad (5.9)$$

Для изменения угла ψ_1 в рассматриваемом приближении получаем

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} + \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1(J_1, I_2)}{\partial J_1}, \quad (5.10)$$

или, в явном виде

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\mu^2}{J_1^3} - \frac{\varepsilon}{\mu^2}(10J_1^3 - 3J_1I_2^2). \quad (5.11)$$

Эта формула дает в рассматриваемом приближении среднюю частоту изменения средней аномалии. Погрешность этой формулы $\sim \varepsilon^2$. Без увеличения погрешности можно во втором члене этой формулы определять J_1 из соотношения $h = -\mu^2/(2J_1^2)$, поскольку сам этот член уже порядка ε . В первом члене этой формулы, поскольку он порядка 1, нужно действовать точнее: использовать для определения J_1 соотношение $\mathcal{H} = h$ и формулы (5.7), т.е.

$$-\frac{\mu^2}{2J_1^2} - \frac{\varepsilon}{\mu^2}\left(\frac{5}{2}J_1^4 - \frac{3}{2}J_1^2I_2^2\right) = h. \quad (5.12)$$

Для J_1 с погрешностью порядка ε^2 отсюда получаем

$$\frac{1}{J_1^3} = \left(\frac{-2h}{\mu^2}\right)^{3/2} - \frac{3\varepsilon}{2\mu^4} \left[\frac{5}{(-2h/\mu^2)^{3/2}} - \frac{3}{(-2h/\mu^2)^{1/2}}I_2^2 \right] + O(\varepsilon^2). \quad (5.13)$$

Теперь в главном приближении из (5.11) получаем

$$\dot{\psi}_1 = \mu^2 \left(\frac{-2h}{\mu^2}\right)^{3/2} - \frac{\varepsilon}{\mu^2} \left[\frac{35}{2(-2h/\mu^2)^{3/2}} - \frac{15}{2(-2h/\mu^2)^{1/2}}I_2^2 \right]. \quad (5.14)$$

Эта формула определяет среднюю частоту движения тел относительно положения перицентра.

В обозначениях разделов 2, 3 формулы для средней частоты прецессии перицентра $\langle \dot{g} \rangle \equiv \dot{\psi}_1$, и средней частоты изменения средней аномалии $\langle \dot{l} \rangle \equiv \dot{\psi}_2$ принимают вид (мы выражаем результаты через сохраняющиеся величины: полную энергию E и угловой момент L):

$$\langle \dot{g} \rangle = \frac{\Lambda c^2}{4} \frac{L}{|E|}, \quad (5.15)$$

$$\langle \dot{l} \rangle = \frac{(2|E|/m)^{3/2}}{GM} - \frac{5\Lambda c^2}{12GM} \left[\frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}}(L/m)^2 \right]. \quad (5.16)$$

Вид этих формул упрощается, если использовать в них усредненные значения большой полуоси и эксцентриситета $\bar{a}, \bar{\varepsilon}$, определяемые соотношениями $J_1 = \sqrt{GM\bar{a}}$, $I_2 = \sqrt{GM\bar{a}(1 - \bar{\varepsilon}^2)}$:

$$\langle \dot{g} \rangle = \frac{\Lambda c^2}{2\bar{\omega}} \sqrt{1 - \bar{\varepsilon}^2}, \quad (5.17)$$

$$\langle \dot{l} \rangle = \bar{\omega} - \frac{\Lambda c^2}{6\bar{\omega}} (7 + 3\bar{\varepsilon}^2). \quad (5.18)$$

Здесь $\bar{\omega} = \sqrt{GM}/\bar{a}^{3/2}$ - [среднее движение для невозмущенной кеплеровской орбиты](#) с большой полуосью $\bar{a}$. Первая из этих формул получена в [22], см. (3.2).

Величины $\bar{a}, \bar{\epsilon}$ выражаются через полную энергию E и угловой момент L с погрешностью $O(\epsilon^2)$ по следующим формулам

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{GM}{2|E|/m} + \frac{\Lambda c^2 GM}{48(|E|/m)^3} \left(5 \frac{(GM)^2}{2|E|/m} - 3(L/m)^2 \right), \\ \bar{\epsilon} &= \sqrt{1 - \frac{(L/m)^2 (2|E|/m)}{(GM)^2}} + \frac{\Lambda c^2 (L/m)^2}{24} \left(5 \frac{(GM)^2}{2|E|/m} - 3(L/m)^2 \right) \left(1 - \frac{(L/m)^2 (2|E|/m)}{(GM)^2} \right)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Формула (5.16) позволяет найти время между прохождениями через перигеум с учетом возмущения (период орбитального движения). В рассматриваемом приближении это время равно

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\langle \dot{l} \rangle} = \frac{2\pi}{\frac{(2|E|/m)^{3/2}}{GM} - \frac{5\Lambda c^2}{12GM} \left[\frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}} (L/m)^2 \right]} \\ &\approx \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^{3/2}} + \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^3} \frac{5\Lambda c^2}{12} \left[\frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}} (L/m)^2 \right].\end{aligned}\quad (5.20)$$

Здесь период выражен через первые интегралы исходной задачи. Можно без изменения порядка погрешности выразить член пропорциональный Λ через $\bar{a}$ и $\bar{\epsilon}$:

$$T = \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^{3/2}} + \frac{5\pi \Lambda c^2}{6\bar{\omega}^3} (4 + 3\bar{\epsilon}^2). \quad (5.21)$$

Общая картина движения в рассматриваемой задаче такова. Большая полуось и эксцентриситет кеплеровского эллипса испытывают малые периодические колебания около постоянных значений $\bar{a}, \bar{\epsilon}$; долгота перигеума и средняя аномалия испытывают малые периодические колебания около равномерных вращений с частотами, задаваемыми формулами (5.15), (5.16). Эти малые колебания определяются из соотношений замены переменных (5.1). Ввиду громоздкости формул, мы ограничимся нахождением функции S и колебаний большой полуоси и эксцентриситета.

Согласно (5.2) и (4.2),

$$S = -\frac{1}{\bar{\omega}} \int (H_1 - \bar{H}_1) (1 - \epsilon \cos \xi) d\xi. \quad (5.22)$$

Здесь $\bar{\omega} = \partial H_0(J_1)/\partial J_1$ - частота кеплеровского движения, посчитанная в главном приближении. Использование в записи S неопределенного интеграла указывает, что S определена с точностью до произвольной функции от медленных переменных. В дальнейшем мы выберем эту произвольную функцию так, чтобы среднее от S по φ_1 равнялось 0. Учитывая,

что $r = a(1 - \epsilon \cos \xi)$, и используя (5.4), получаем

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\bar{\omega}} \left[\left(\int a^2 (1 - \epsilon \cos \xi)^3 d\xi \right) - a^2 \left(1 + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) (\xi - \epsilon \sin \xi) \right] \\
&= \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[\left(\int \left(1 - 3\epsilon \cos \xi + 3\epsilon^2 \frac{1 + \cos 2\xi}{2} - \epsilon^3 \frac{\cos 3\xi + 3 \cos \xi}{4} \right) d\xi \right) - \left(1 + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) (\xi - \epsilon \sin \xi) \right] \\
&= \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[-3\epsilon \sin \xi + \frac{3}{4}\epsilon^2 \sin 2\xi - \frac{1}{12}\epsilon^3 (\sin 3\xi + 9 \sin \xi) + \epsilon \left(1 + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) \sin \xi \right] + C \\
&= \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[\epsilon \left(-2 + \frac{3}{4}\epsilon^2 \right) \sin \xi + \frac{3}{4}\epsilon^2 \sin 2\xi - \frac{1}{12}\epsilon^3 \sin 3\xi \right] + C.
\end{aligned}$$

Здесь C - произвольная функция от a, ϵ . Мы выберем C так, чтобы среднее от S по φ_1 равнялось 0. Получаем

$$C = -\frac{a^2}{\bar{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(\epsilon \left(-2 + \frac{3}{4}\epsilon^2 \right) \sin \xi + \frac{3}{4}\epsilon^2 \sin 2\xi - \frac{1}{12}\epsilon^3 \sin 3\xi \right) (1 - \epsilon \cos \xi) d\xi = 0.$$

Окончательно

$$S = \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[\epsilon \left(-2 + \frac{3}{4}\epsilon^2 \right) \sin \xi + \frac{3}{4}\epsilon^2 \sin 2\xi - \frac{1}{12}\epsilon^3 \sin 3\xi \right], \quad (5.23)$$

где a, ϵ должны быть заменены на $\bar{a}, \bar{\epsilon}$ и выражены через J_1, I_2 согласно (5.5), а эксцентрисическая аномалия ξ должна быть выражена через среднюю аномалию φ_1 согласно (4.2).

Согласно (5.1) и (5.2), величины I_1 и J_1 связаны соотношением

$$I_1 = J_1 - \varepsilon \frac{1}{\bar{\omega}} (H_1 - \bar{H}_1) \quad (5.24)$$

Используя (5.4), получаем

$$I_1 = J_1 + \varepsilon \frac{\bar{a}^2}{\bar{\omega}} \left((1 - \bar{\epsilon} \cos \xi)^2 - \left(1 + \frac{3\bar{\epsilon}^2}{2} \right) \right) = J_1 + \varepsilon \frac{\bar{a}^2}{\bar{\omega}} \left(-\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right).$$

Согласно (4.2) $I_1 = \sqrt{GMa}$, $J_1 = \sqrt{GM\bar{a}}$. Тогда

$$\sqrt{GMa} = \sqrt{GM\bar{a}} + \varepsilon \frac{\bar{a}^2}{\bar{\omega}} \left(-\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right),$$

откуда, в рассматриваемом приближении,

$$a = \bar{a} + \varepsilon \frac{2}{\sqrt{GM}} \frac{\bar{a}^{5/2}}{\bar{\omega}} \left(-\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right).$$

Учитывая, что $\bar{\omega} = \sqrt{GM}/\bar{a}^{3/2}$, а также что $\varepsilon = \Lambda c^2/6$, получаем

$$a = \bar{a} + \frac{\Lambda c^2 \bar{a}}{3 \bar{\omega}^2} \left(-\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right). \quad (5.25)$$

Сохранения углового момента позволяет определить колебания эксцентриситета по колебаниям большой полуоси. Из соотношения $a(1 - \epsilon^2) = \bar{a}(1 - \bar{\epsilon}^2)$ получаем

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \frac{\Lambda c^2(1 - \bar{\epsilon}^2)}{6\bar{\omega}^2} \left(-\bar{\epsilon} - 2\cos\xi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\cos 2\xi \right). \quad (5.26)$$

Введем углы $\bar{l} = \psi_1, \bar{g} = \psi_2$. Эти углы изменяются равномерно с угловыми скоростями (5.18), (5.17). Средняя аномалия $l = \varphi_1$ и долгота перицентра $g = \varphi_2$ совершают малые колебания относительно этих углов в соответствии с двумя последними формулами в (5.1), которые без изменения погрешности представляются в виде

$$l = \bar{l} - \varepsilon \frac{\partial S}{\partial I_1}, \quad g = \bar{g} - \varepsilon \frac{\partial S}{\partial I_2}. \quad (5.27)$$

Здесь функция $S = S(I_1, I_2, \bar{l})$ задается формулой (5.23), в которой большая полуось орбиты a и эксцентриситет ϵ должны быть выражены через переменные Делоне I_1, I_2 из соотношений (4.2), а эксцентрическая аномалия ξ рассматривается как неявная функция от $\bar{l}$ согласно уравнению Кеплера $\bar{l} = \xi - \epsilon \sin \xi$.

6 Заключение

Задача о движении двух гравитирующих тел при наличии ТЭ рассмотрена как возмущение задачи Кеплера. В рамках первого приближения в теории возмущений Делоне-Цейпеля описано поведение элементов кеплеровской орбиты под влиянием ТЭ. Большая полуось и эксцентриситет кеплеровской орбиты испытывают малые периодические колебания около своих средних значений. Эти средние значения даются формулами (5.19), а колебания - формулами (5.25) и (5.26). Долгота перицентра испытывает малые периодические колебания относительно медленного равномерного вращения с частотой (5.17). Ранее формула для этой частоты была получена несколько иным методом в [22]. Средняя аномалия гравитирующих тел испытывает малые периодические колебания относительно медленного равномерного вращения с частотой, даваемой формулой (5.18). Эта формула учитывает поправку к [среднему движению за счет ТЭ](#). Колебания относительно этих равномерных вращений даются формулами (5.27) (мы не проводим в явном виде вычислений в (5.27) ввиду их громоздкости). Период орбитального движения, определяемый как время между прохождением через перицентр, отличается от кеплеровского периода малой поправкой. Эта поправка учтена в формуле для периода (5.21). Колебания элементов орбиты происходят с этим периодом.

Работа ГСБК частично поддержана грантами РФФИ №№ 18-02-00619, 20-02-000455, 20-52-12053. Работа АИН частично поддержана грантом фонда Леверхульме № RPG-2018-143.

Список литературы

- [1] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [2] A.G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [3] D.N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [4] M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004).
- [5] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [6] S.M. Carroll, W.H. Press and E.L. Turner, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30**, 499 (1992).
- [7] S. M. Carroll, *Living Rev. Relativ.* **4**, 1 (2001).
- [8] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological* (Oxford University Press, Oxford, UK, 2001).
- [9] C. O’Raifeartaigh, M. O’Keeffe, W. Nahm and S. Mitton, *Eur. Phys. J. H* **43**, 73 (2018).
- [10] B. Novosyadlyj, *Eur. Phys. J. H* **43**, 267 (2018).
- [11] L. Iorio, *Universe* **1**, 38 (2015).
- [12] I. Debono and G. F. Smoot, *Universe* **2**, 23 (2016).
- [13] J. Islam, *Phys. Lett. A* **97**, 239 (1983).
- [14] J. Cardona and J. Tejero, *Astrophys. J.* **493**, 52 (1998).
- [15] L. Iorio, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 473 (2006).
- [16] L. Iorio, *Advances in Astronomy* **2008**, Article ID 268647 (2008).
- [17] H. Arakida, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 1408 (2013).
- [18] S.S. Ovcherenko and Z.K. Silagadze, *Ukr. J. Phys.* **61**, 342 (2016).
- [19] L. Iorio, *Universe* **4**, 59 (2018).
- [20] J.M. Cohen and B. Mashhoon, *Phys. Lett. A* **181**, 353 (1993).
- [21] E. Hackmann, C. Lammerzahl *Phys. Rev. D* **90**, 044059 (2014).
- [22] A. Kerr, J. Hauck and B. Mashhoon, *Class. Quantum Grav.* **20**, 2727 (2003).

- [23] P. Jetzer and M. Sereno, Phys. Rev. **D 73**, 044015 (2006).
- [24] M. Sereno and P. Jetzer, Phys. Rev. **D 73**, 063004 (2006).
- [25] V. Kagramanova, J. Kunz and C. Lammerzahl, Phys. Lett. **B 634**, 465 (2006).
- [26] G. Adkins, J. McDonnell and R. Fell, Phys. Rev. **D 75**, 064011 (2007).
- [27] G. Adkins and J. McDonnell, Phys. Rev. **D 75**, 082001 (2007).
- [28] M. Sereno and P. Jetzer, Phys. Rev. **D 75**, 064031 (2007).
- [29] O.I. Chashchina and Z.K. Silagadze, Phys. Rev. **D 77**, 107502 (2008).
- [30] A.D. Chernin, Phys. Usp. **44**, 1099 (2001).
- [31] A.D. Chernin, Phys. Usp. **51**, 253 (2008).
- [32] G.S. Bisnovatyi-Kogan and A.D. Chernin, Astrophysics and Space Science, **338**, 337 (2012).
- [33] G.S. Bisnovatyi-Kogan, M. Merafina, Int. J. Mod. Phys. D28, 1950155 (2019)
- [34] N.V. Emelyanov and M.Y. Kovalyov, Mon. Not. R. Astron. Soc. **429**, 3477 (2013).
- [35] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products* (1965) New York: Academic Press, edited by Geronimus, Yu.V., Tseytlin, M.Yu. (4th ed.).
- [36] L. Landau, E. Lifshitz, *Mechanics. Course of theoretical physics* (1969) Pergamon Press.
- [37] Г.Н.Дубошин, *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике* (1976) Наука.
- [38] Г.Е.О.Джакалья, *Методы теории возмущений для нелинейных систем* (1979) Наука.